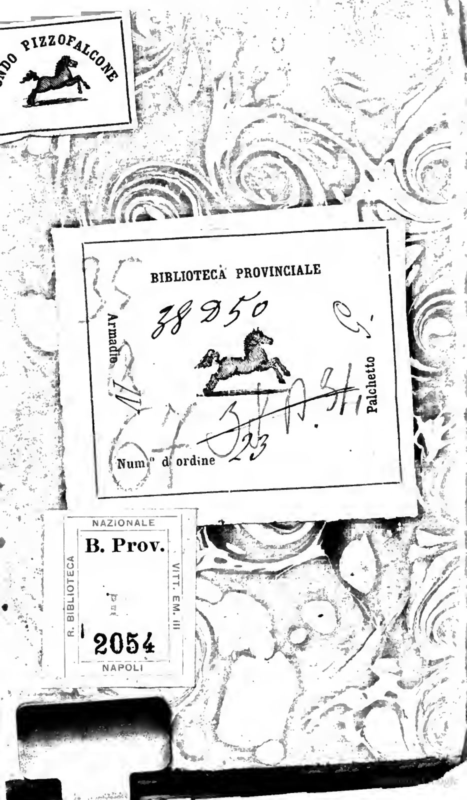
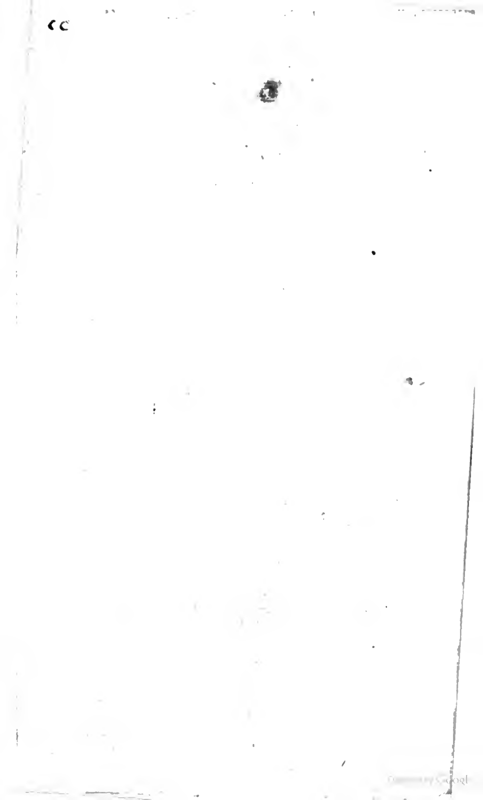



PIZZOFALCONE
BIBLIOTECA PROVINCIALE
38950
Armadio
Palchetto
Num° d'ordine
NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
2054
NAPOLI





ÉLÉMENS

DE

STÉRÉOTOMIE.

TOME PREMIER.

ÉLÉMENS DE STEREOTOMIE,

A L'USAGE

DE L'ARCHITECTURE,

POUR

LA COUPE DES PIERRES.

PAR M. FREZIER, Lieutenant Colonel, Chevalier de l'Ordre Royal & Militaire de Saint Louis, Directeur des Fortifications de Bretagne.

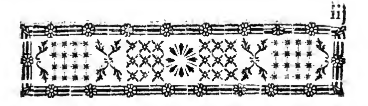
TOME PREMIER.



A PARIS,
Chez CH. ANT. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi, pour l'Artillerie & le Génie, quai des Augustins, à l'Image Notre-Dame,

M. D. CC. LX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.



PRÉFACE.

LE ſujet dont il s'agit ici, n'étant ni à l'uſage ni à la portée de tout le monde, n'eſt pas de l'eſpece de ceux qui excitent la curioſité d'un grand nombre de lecteurs; je crois pouvoir les réduire à trois claſſes, qu'il n'eſt pas aiſé de contenter, parce qu'ils ont des vues différentes.

La premiere eſt de quelques gens de lettres, amateurs des Arts, qui étant initiés dans la Géométrie, ne cherchent que la théorie des productions qui méritent leur attention: telle eſt dans l'architecture la ſcience de la *coupe des pierres*. Ceux-ci contens de ſe mettre en état de juger de ce qu'il y a de ſingulier dans un édifice, ſe bornent à s'inſtruire des raiſons des opérations qui ont produit quelque effet remarquable; & comme ils n'ont pas beſoin de la pratique, ils regardent l'*épure*

circonſtanciée des *traits*, c'eſt-à-dire les deſſeins ſur leſquels on dirige les modeles pour l'exécution, comme des détails ſuperflus qu'ils voudroient retrancher : j'ai lieu de penſer ainſi, ſur ce que le Libraire de Strasbourg, qui a fait la premiere édition de ma Stéréotomie, n'ayant fait aucune difficulté de vendre ſéparément le premier tome (qui ne contient que des principes de théorie) à ceux à qui la pratique eſt inutile, en a beaucoup plus débité que du ſecond & du 3e, qui ne contiennent que des détails des différentes eſpeces d'ouvrages de *traits des voûtes*, quoique plus amples, plus corrects, & plus variés que ceux des Auteurs qui m'ont précédé ; de ſorte que celui de Paris, qui en avoit acquis le fonds, a été obligé d'anticiper une ſeconde édition de ce premier tome, pour completer ce qui reſtoit d'exemplaires du ſecond & du troiſieme. Il eſt vrai que ce même tome a été le premier Livre qui ait donné la *théorie de la coupe des pierres, qui étoit preſque ignorée avant moi.* Je crois pouvoir le répéter, après ce

qui en a été dit dans la nouvelle Encyclopédie, au mot *architecture* : ainsi il avoit pour lui la nouveauté, quoiqu'il n'en manquât pas dans les deux tomes suivans ; premiérement en plusieurs circonstances de pratiques : secondement, en ce qu'elles sont partout accompagnées de démonstrations, qui en prouvent la justesse, laquelle étoit souvent mal-à-propos supposée chez les Auteurs qui avoient traité cette matiere, comme je l'ai fait remarquer lorsque le cas s'est présenté ; j'ai la satisfaction de voir que ces nouveautés ont été jugées intéressantes, puisqu'on va continuer la seconde édition d'un de ces Livres, qui en ont rarement deux en peu de tems, parce que la grande quantité de planches de gravure occasionne beaucoup de dépense, qui ne peut être remboursée avec bénéfice, que par un grand nombre de curieux dans un genre de science, où naturellement il y en a fort peu d'une érudition suffisante à pouvoir en profiter.

La seconde classe des lecteurs de cette matiere sont les Artisans, Charpentiers,

Menuisiers, Appareilleurs, & quelques Marbriers qui n'ont besoin, au contraire, que des instructions d'une pratique servile, qu'ils considerent comme les secrets de leur profession : ceux-ci n'étant pas en état d'entendre des raisonnemens, fondés sur la Géométrie, les passent comme des inutilités, qui ne font que les embrouiller : ils ne veulent que des descriptions bien détaillées, des *traits* tout digérés & circonstanciés pour l'exécution de l'ouvrage qu'ils ont à faire, comme ceux qu'on trouve dans les Livres de *Deran* & de la *Rue*, particuliérement de ce dernier, dont les planches sont beaucoup plus expressives, plus grandes & mieux gravées, sans s'embarrasser des démonstrations, ni s'il est des manieres d'opérer plus générales & plus correctes, comme on en trouve dans les deux derniers tomes de ma Stéréotomie.

La troisieme classe des lecteurs de cette matiere, est de ceux qui sont intéressés à s'instruire de la science & de l'art de la *coupe des pierres*, comme d'un des principaux objets de l'état qu'ils embrassent :

tels ſont les jeunes Architectes dans le genre civil, les uns pour ſe mettre en état de diriger les bâtimens des particuliers, les autres pour les publics, comme ſont les ponts & chauſſées; & enfin ces Officiers militaires, deſtinés à préſider aux fortifications, ci-devant diſtingués des Architectes par le nom d'*Ingénieurs*, que pluſieurs états civils ſe ſont arrogé par un abus qui confond les profeſſions.

Comme cette derniere claſſe eſt compoſée de gens qui ont des principes de Géométrie, c'eſt pour eux principalement que j'ai fait cet abrégé de ma Stéréotomie, en conſidération de ce qu'étant partagés à différens objets d'occupations indiſpenſables, ils peuvent n'avoir pas le tems de ſe livrer à l'étude d'un Traité de longue haleine ſur une ſeule partie de l'architecture, dont l'uſage ne ſe préſente pas plus ſouvent que bien d'autres. J'y ai d'ailleurs été invité par un célebre Profeſſeur du Roi, M. *Blondel*, connu par ſes beaux ouvrages ſur les décorations, & recommandable par le zele qu'il a pour la per-

fection de l'architecture, qui l'engage à communiquer publiquement ses lumieres à ceux qui veulent en profiter. Je souhaite que cet abrégé élémentaire puisse seconder ses bonnes intentions, en facilitant à ses Eleves, & à tous autres, une étude qui paroît hérissée d'épines à ceux qui n'en pénetrent pas les principes.

Il me semble que j'ai lieu de l'espérer, & de me flatter du succès, à en juger par ce que j'ai vu & oui dire à quelques personnes qui avoient bien entendu le premier tome de ma Stéréotomie, qu'aidés de deux ou trois leçons de pratique à *couper du trait*, c'est-à-dire à s'exercer sur de petits corps solides, faciles à couper & tailler, pour y dresser des paremens, délarder des surfaces courbes, appliquer les panneaux ou modeles de leur contour, concavité & convexité, & ceux des ouvertures des angles de leurs inclinaisons mutuelles, ils n'avoient plus besoin que d'un peu de réflexion pour exécuter en petit toutes sortes de voûtes; c'est tout ce que je me suis proposé dans cet abrégé.

Si cependant quelques Artiſtes ſans théorie, & les particuliers qui font bâtir dans des lieux où l'on ne trouve que des Tailleurs de pierre ſans connoiſſance d'appareil (ce qu'on appelle *des marteaux ſans tête*), ſemblent encore déſirer un ſecond tome pour la pratique des traits les plus uſuels tout digérés; j'employerai volontiers le peu de loiſir que me laiſſent les occupations de mon état à ce travail de cabinet, que la foibleſſe d'un âge déja fort avancé rend pénible & ennuyeux; à leur fournir les ſecours d'inſtructions dont ils ont beſoin pour l'exécution de ce qu'ils doivent conſtruire, perſuadé de cette noble maxime des Romains, que nous ne ſommes pas nés uniquement pour notre plaiſir, mais encore pour nous rendre utiles à la ſociété.

Non nobis, ſed reipublicæ nati ſumus. CIC.



TABLE

DES CHAPITRES,

Et des principaux ſujets contenus dans ce volume.

Fin de la Table du premier volume.

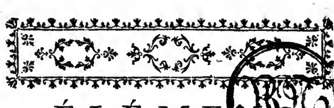
ERRATA du premier volume.

PAGE 38, ligne 18, adoptée, *lisez* adaptée.
Page 39, lig. 13, BX & DA, *lisez* DX & BA.
Page 41, lig. 29, *n2*, *lisez* *no*.
Page 44, lig. 10, C*c*, *lisez* C*o*.
Page 47, lig. 28, après *ou...su*, & dans... *scd*, *ôtez* est circonscrit à la corde *su*.
Page 68, lig. 16, imbra, *lisez* imbrex.
Page 80, lig. 2, OI, *lisez* OL.
Page 96, lig. 30, GKG, *lisez* GKF.
Page 97, lig. 3, petit axe, *lisez* petit ou grand axe.
Ibid. lig. 23, AHB, *lisez* A*h*B.
Page 100, lig. 11, 28, *lisez* 68.
Page 109, lig. 3, TS, *lisez* T*s*.
Page 113, lig. 14, pénétre, *lisez* est pénétré par.
Page 114, lig. 14, HX, *lisez* H*x*.
Page 115, lig. 11, *ky*, *lisez* K*y*.
Page 117, lig. 18, EP, *lisez* EF.
Page 144, lig. 15, OK OL, *lisez* *o*K *o*L.
Page 145, lig. 15, C, *lisez* G.
Page 164, lig. 27, élevés, *lisez* bien élevés.
Page 165, lig. 10, VDK, *lisez* RDK.
Page 186, lig. 30, AP, *lisez* AR.
Page 216, lig. 21, le font, *lisez* se font.
Page 244, lig. 29, BI, *lisez* BL.
Page 251, lig. 15, *e*ML, *lisez* *e*M*l*.

OMISSIONS des indications des figures en marge à y ajouter avant que de lire.

PAGE 22, ligne 7, *lisez* figure 6.
Page 96, lig. 28, *lisez* fig. 45.
Page 113, lig. 8, *lisez* fig. 54.
Ibid. lig. 9, *lisez* fig. 52.
Page 124, à la marge, fig. 59, *lisez* fig. 58.
Page 126, lig. 20, *lisez* fig. 59 & 60.
Ibid. lig. 22, *lisez* fig. 61, 62, 63, 64.
Page 137, fig. 69, *lisez* fig. 68.
Page 162, lig. 29, *lisez* fig. 79.
Page 170, lig. 11, *lisez* fig. 84 & 88.
Ibid. figure 85, *lisez* fig. 83.
Page 177, lig. 10, *lisez* fig. 103.
Page 178, lig. 6, *lisez* fig. 90.
Page 192, lig. 21, *lisez* fig. 92.
Page 193, lig. 28, *lisez* fig. 96.
Page 207, lig. 6, *lisez* fig. 101.
Ibid. lig. 22, *lisez* fig. 99.

ELEMENS



ÉLÉMENS DE STEREOTOMIE

A L'USAGE

DE L'ARCHITECTURE

POUR

LA COUPE DES PIERRES.

PREMIERE PARTIE.

Des figures des ſections des corps coupés par des plans, ou pénétrés par des ſolides.

POUR faire du progrès dans les Arts qui ne conſiſtent pas en de pures imitations de ce qui ſe préſente aux yeux, mais où il y a des principes cachés qui en ſont l'ame, & capables de produire des effets ſurprenans comme dans cette partie de l'Architecture, qu'on appelle *la coupe des pierres*, ce n'eſt pas aſſez de voir travailler; il faut remonter aux raiſons ſur leſquelles ſont fondées les

opérations de la main dont elles ſont les guides, pour arriver aux différentes conſtructions qu'on ſe propoſe. Les ſeules pratiques ſont des énigmes qui n'éclairent point l'eſprit, & ne mettent pas le ſpectateur en état d'imiter ce qu'il a vu faire, pour peu qu'il y ait de changement dans l'ouvrage, parce qu'il peut être de nature différente de celui qu'il a vu exécuter, quoique ſemblable en apparence ; il ne faut pour cela qu'une petite circonſtance de plus ou de moins.

Dans cet Art il y a deux objets qu'on peut conſidérer ſéparément.

Le premier eſt de former un corps de figure quelconque, par l'aſſemblage d'un grand nombre de petites parties, méthodiquement figurées & arrangées, de façon qu'elles concourent à la figure générale d'une voûte, ou de quelqu'autre partie d'un édifice.

Le ſecond objet eſt de forcer les corps peſans à ſe ſoutenir mutuellement en l'air par une ingénieuſe inclinaiſon & application de quelques-unes de leurs ſurfaces contigues, qui ſe préſentent des appuis réciproques, ſur leſquels ils ſont tellement équilibrés & balancés, que la même peſanteur qui tend à les faire tomber, ne ſert qu'à en affermir l'aſſemblage.

Le premier de ces objets appartient uniquement à la Géométrie, & le second à la Statique. C'est du premier dont nous devons nous occuper dans le cours de cet Ouvrage, sans nous arrêter à la théorie de la Statique, dont on peut se passer dans l'exécution de notre Art.

Nous nous bornerons donc à rappeller quelques propositions des élémens de Géométrie & de Sections coniques, dans lesquels nous supposons le lecteur suffisamment initié pour entendre nos raisonnemens & démonstrations : sur quoi nous entrons en matiere.

Après qu'on s'est déterminé à une figure de voûte relativement à la situation des lieux, aux besoins, ou à la décoration qu'on se propose, il faut commencer par la comparer à un de ces corps réguliers, ou réguliérement irréguliers, qui sont connus & analysés dans les élémens de Géométrie, où l'on trouve les moyens d'en déterminer les contours & les sections : ainsi s'il s'agit d'un *dôme*, on le comparera à un *hémisphere*, s'il est en plein ceintre en tout sens, ou à un *hémisphéroïde*, s'il est surmonté ou surbaissé. S'il s'agit d'un *berceau*, on le comparera à un *demi-cylindre droit* sur sa base, s'il est en plein ceintre, ou à un cylindre *scalene*, s'il est biais ou surmonté, ou sur-

baissé à la clef. S'il s'agit d'une *trompe*, on la comparera de même à un cône droit ou scalene, suivant l'exigence du cas; une *voûte sur le noyau* a un anneau ouvert ou fermé; une *vis* a une helice, qui est un anneau tournant & rampant, ainsi du reste; & raisonnant en conséquence de ces connoissances primitives, on conclud que si ces voûtes, que nous appellons simples, sont coupées ou traversées par des murs en différentes directions, il en résultera des courbes, telles qu'il en arrive dans les corps primitifs, lorsqu'ils sont coupés par des plans.

Et enfin s'il convient que ces voûtes simples soient traversées ou rencontrées par d'autres, de même, ou de différentes especes, on considere ce qui arrive à l'intersection des corps primitifs, supposant qu'ils soient pénétrés par d'autres corps ronds, concaves ou convexes; ce qui fait des voûtes *composées*.

§. Si l'on pouvoit faire les voûtes d'une seule piece, ces considérations seroient suffisantes pour parvenir à leurs formations; mais comme il est impossible de trouver des pierres de grandeur & de consistance propre à faire un si grand ouvrage, & encore plus de les manier, remuer, & transporter, on est obligé de les faire de

l'assemblage d'un très-grand nombre de petites pierres qui doivent satisfaire aux deux objets dont nous avons parlé de Géométrie & de Statique, sçavoir, concourir, suivant leur grandeur & position, à la formation d'une surface concave projettée, & se fournir réciproquement des appuis mutuels, cachés dans l'épaisseur de la voûte, par les inclinaisons des lits & des têtes, ensorte qu'elles se soutiennent en l'air.

§. Ces pierres s'appellent *voussoirs*; les surfaces sur lesquelles ils s'appuient, s'appellent les *lits*, celles qui sont apparentes en dedans, s'appellent *doële*, celles qui le sont en dehors, s'appellent *extrados*, celles qui terminent leurs faces, s'appellent *tête*, ou *joint de doële*, lorsqu'elles terminent leur longueur entre les lits, sans autre fonction que de prolonger les rangs des voussoirs.

Ainsi dans chaque pierre de voussoir, il y a trois sortes de surfaces à considérer, sçavoir, 1°. celles qui concourent à la formation apparente de la voûte, en dedans ou en dehors, telles sont les *doëles* ou les *extrados*, lesquelles sont nécessairement concaves ou convexes, à l'exception du seul cas d'une voûte plate. 2°. Celles qui concourent à l'édifice, c'est-à-dire à la construction de la voûte considérée, non

dans sa figure, mais dans sa solidité; celles-ci sont les lits, & quelquefois aussi les têtes. 3°. Enfin celles qui ne servent de rien ordinairement à la solidité, mais simplement à son étendue ou à sa terminaison, telles sont les *têtes* qui sont souvent apparentes, & celles qui servent à former les joints de doële lorsqu'elles sont cachées.

Les surfaces des deux dernieres especes ne sont pas comme celles de la premiere, nécessairement courbes, mais tantôt planes, comme dans les berceaux droits & les trompes, & tantôt courbes, comme dans les berceaux tournans, & les voûtes sphériques.

§. *Observation & regle générale sur les angles des surfaces entr'elles, qu'on appelle en terme de l'art*, les arêtes.

Comme les pierres sont des matieres la plûpart fragiles, je veux dire faciles à casser plus ou moins, suivant la qualité de leur consistance, il est de nécessité indispensable que les surfaces qui comprennent les voussoirs ne soient pas tellement inclinées entr'elles, qu'elles fassent des angles fort aigus, mais toujours approchant du droit, autant qu'il est possible; car quoique l'angle droit soit moins fort que l'angle obtus, il

lui eſt toujours préférable pour un joint de lit, par une raiſon toute ſimple, qui eſt qu'étant obtus d'un côté, le contigu de l'autre de ce joint ſera néceſſairement aigu.

D'où il réſulte que la force de ces angles ſolides étant inégale, la preſſion de la pouſſée & du poids de la voûte aura auſſi des effets inégaux ſur les arêtes contigues des vouſſoirs, & fera éclater celle qui ſera la plus foible : c'eſt un effet que l'on remarque ſouvent dans les clavaux des plates-bandes, dont les arêtes ſont aigues auprès du ſommier *s g i* A, parce que la plate-bande A B étant horizontale, & le joint *g i* incliné à l'horizon, il forme d'un côté un angle aigu A *i g*, & de l'autre un angle obtus *g i* B. Planche I. *Figure* 1.

Dans les voûtes concaves, où les joints de lit font avec la doële un angle mixte de part & d'autre, on a un moyen ſimple de les faire égaux, ſi la concavité de la doële eſt circulaire, en les dirigeant au centre du cercle, & ſi elle eſt elliptique ou d'autre courbe, ils le ſeront encore entr'eux, ſi l'on tire au point de la courbe une tangente T *t*, à laquelle la direction du joint CP ſoit perpendiculaire, comme nous le dirons en ſon lieu. *Fig.* 2.

Cette obſervation étant préſuppoſée, & la néceſſité de mettre de l'ordre dans les rangs des vouſſoirs, on reconnoîtra que

pour avoir égard à ces conditions, il n'eſt pas indifférent de diviſer la figure totale de la voûte d'une façon plutôt que d'une autre, parce que toutes ſortes de direction & de poſitions de ſes rangs ne ſont pas poſſibles dans l'exécution, ſans tomber dans quelque inconvénient. Je m'explique par un exemple.

Suppoſons qu'il s'agiſſe de faire un dôme qui ſoit une hémiſphere, c'eſt-à-dire, en terme d'ouvrier, en plein ceintre en tout ſens, il ſembleroit tout naturel de faire les rangs de vouſſoirs horizontaux, comme des anneaux qui diminueroient toujours de diametre, à meſure qu'ils s'éléveroient & s'appuieroient en partie les uns ſur les autres à plat, ce qu'on appelle, en terme d'Architecture, *en tas de charge*, comme on voit à

Fig. 2. la fig. 2, dont la moitié ACL eſt le profil, ſuivant cette diſpoſition qui ſatisfait à la Statique, en ce que chaque rang ſupérieur eſt ſuffiſamment appuyé ſur ſon inférieur; mais cette conſtruction ne ſatisfait point aux regles de la ſolidité des angles ou arêtes des pierres des vouſſoirs inférieurs, dont les angles à la doële ſont tous néceſſairement aigus, & de plus en plus, à meſure que la voûte s'éleve, comme on le voit en *eiA*, *f.* 2. 1.

Le même inconvénient ſe trouve en fai-

ſant les rangs de vouſſoirs verticaux, dont la moitié LCB eſt le profil, non pour la ſolidité à certains égards, mais pour la difficulté de faire des arêtes fort aigues en taillant la pierre, tel ſeroit l'angle *g*.4.3 & P.5.4, quoique cette foibleſſe ait plus à ſouffrir de la preſſion du rang contigu, parce que chaque rang eſt une arcade qui peut ſe ſoutenir ſans le ſecours de ſon voiſin, mais auſſi il pouſſe beaucoup à ſes impoſtes, où il faut en épaiſſir les pieds droits. *Fig. 2.*

Enfin il eſt encore clair que ſi les rangs de vouſſoirs étoient inclinés à l'horizon, comme R*r*, V*u*, ils participeroient encore des deux inconvéniens. *Fig. 2.*

D'où il ſuit que les diviſions de la voûte ſphérique en rangs de vouſſoirs par tranches paralleles de ſections planes ne conviennent point à la conſtruction, parce qu'il n'y a de ſection plane qui puiſſe couper la ſurface d'une ſphere à angles égaux de part & d'autre, que celle d'un cercle majeur, c'eſt-à-dire qui paſſe par le centre de la ſphere, en quelque ſituation qu'il puiſſe être, horizontale, verticale, ou inclinée, le rayon étant toujours perpendiculaire à la tangente; ce qui eſt démontré dans les Elémens de Géométrie (*Eucl. l.* 3, *prop.* 16), mais non pas les cordes au point d'attouchement.

Cependant les rangs des vouſſoirs d'une voûte ſphérique peuvent être, & le ſont très-fréquemment, en toutes ſortes de ſituations horizontales, verticales, & inclinées; mais leurs lits ne pouvant être plans, comme nous venons de le démontrer, ſont néceſſairement des ſurfaces courbes en zones coniques, concaves & convexes, terminées par des lignes courbes au contour de la ſection plane, & droites dans la direction de leur épaiſſeur, ſuivant le rayon, pour conſerver l'égalité des angles des arêtes des lits contigus, ſçavoir de l'inférieur & du ſupérieur, en terme de l'art de *deſſus* & de *deſſous*.

De-là naiſſent pluſieurs difficultés dans les opérations des *traits* qu'on ne peut réſoudre ſans le ſecours de la Géométrie.

Premiérement, à l'égard des ſections planes qui peuvent être terminées par de différentes courbes, comme dans le cône, où il y en a de quatre eſpeces.

Secondement, pour leur tirer des tangentes par des points donnés, & y diriger perpendiculairement les joints.

Troiſiémement, pour reconnoître les courbes des interſections des ſurfaces de deux voûtes différentes, ou ſemblables, qui ſe croiſent, ou aboutiſſent l'une à l'autre; ce qui arrive dans tous les cas des

voûtes *compoſées*, qui ſont plus ordinaires que les ſimples, leſquelles courbes ſont quelquefois planes, & ſouvent à *double courbure*.

Pareille pénétration arrive auſſi dans certaines voûtes ſimples, telles ſont les ſphériques, ſphéroïdes & annulaires, où les lits ſont des zones ou portion de cônes tronqués, qui pénetrent le corps de ces voûtes, & donnent à leurs ſurfaces concaves & convexes des courbes qui ſeroient à double courbure, ſi l'on n'affectoit de faire ces lits horizontaux, parce qu'alors elles deviennent planes à différentes hauteurs au deſſus de l'horizon, plus baſſe à la rencontre de la ſurface de la doële, & plus haute à celle de l'extrados.

Comme nous avons à parler à ce ſecond genre de lecteurs, qui ne ſont pas beaucoup initiés dans la Géométrie, nous allons leur expoſer les difficultés de la coupe des pierres des voûtes ſphériques & ſphéroïdes, dont nous parlons, par une comparaiſon familiere de leur figure avec celle d'un melon, citrouille, ou orange, & de celles qui ſurviennent à leurs parties, lorſque ces fruits ſont coupés par des plans, ou pénétrés par quelqu'autre corps rond: nous ſuppoſerons que le *plan* coupant eſt une feuille de fer blanc bien applanie, dont

on se servira au lieu de couteau, pour étudier la nature, au défaut des connoissances de la Géométrie.

S'il s'agit de faire un *dôme* sphérique en plein ceintre, on peut prendre pour modele la moitié d'une orange bien ronde, dont l'épaisseur de l'écorce pourra exprimer celle de la voûte; mais comme elle est un peu mince, on ne peut pas facilement y faire remarquer la figure des lits: ainsi nous lui préférons un melon, dont la pulpe & l'écorce ont plus d'épaisseur; & comme il y a des melons alongés, & des côtes tracées par la nature, sur la surface d'un pole à l'autre, nous y trouverons le modele d'un
Fig. 3. dôme *surmonté* (voyez la fig. 3, pl. 1), c'est-à-dire dont le demi-diametre de l'axe du milieu dans sa longueur est plus grand que celui de sa largeur en travers, perpendiculairement à celui de sa longueur.

Nous y trouverons aussi en le coupant suivant cette longueur, le modele d'une
Fig. 4. voûte en dôme *alongé*, dont le contour de sa naissance n'est pas un cercle, mais une ellipse, que les ouvriers appellent *ovale* ou *anse de panier*.

Enfin nous trouverons dans une citrouille applatie, coupée en travers dans sa plus grande largeur, le modele d'une voûte en cul-de-four, ou sphéroïde applati, dont la

hauteur de la clef, mesurée sur le niveau de la naissance, est moindre que le demi-diametre de son contour, pris au niveau de son *imposte*.

Il s'agit à présent de couper la moitié de ces trois sortes de fruits en un grand nombre de parties, lesquelles, malgré plusieurs divisions, puissent se soutenir dans la place où elles sont sans tomber, ensorte qu'elles se soutiennent mutuellement, quoique le milieu soit vuide de sa graine, & qu'il n'y ait que l'épaisseur de la pulpe.

Il est déja évident que si je coupe cette moitié de melon, suivant les côtes que la nature a tracées sur sa surface, en y faisant passer ma feuille de fer blanc, puis en la retirant doucement, ces parties de côtes se soutiendront par le bas, sur leur assiete, & par le haut en s'appuyant les unes contre les autres.

D'où je conclus en langage mathématique, que toutes les sections planes faites par l'axe du sphéroïde supposé en situation verticale, se soutiennent mutuellement, non seulement lorsqu'elles sont entieres jusqu'au *pole*, qui est la *clef* du sommet, mais encore lorsque les pointes de ces côtes sont coupées horizontalement, parce qu'étant penchées les unes contre les autres, elles se soutiennent réciproquement dans leur in-

clinaiſon, enſorte que l'une étant ôtée, les autres doivent tomber, parce que chacune de ces parties eſt un appui commun à toutes les autres. Il ne s'agit plus que de ſçavoir comment on doit former les *lits*, c'eſt-à-dire les appuis ſupérieurs & inférieurs aux lits de deſſus & de deſſous, pour que les parties entaſſées jouiſſent du même avantage d'être appuyées ſur leur baſe, & dans leur hauteur inclinée. Il eſt clair qu'à ce dernier égard, le ſecond rang de diviſion de parties horizontalement rangées, jouit du même avantage que celles du premier & du dernier rang de hauteur.

Mais on s'apperçoit que la baſe de chacune de ces parties, dont la charge fait effort pour les pouſſer en dehors au vuide, où il n'y a rien pour les arrêter, a beſoin d'être retenue : car ſi elles étoient, comme celles de l'impoſte, ſur un plan horizontal, elles tendroient à gliſſer en dehors, parce que leur inclinaiſon eſt bien différente de celle de *l'impoſte*, où la naiſſance de la courbure eſt preſque verticale, par conſéquent ſans pouſſée & nulle : donc la baſe du ſecond rang doit être un peu inclinée pour l'appuyer, comme un étançon, le troiſieme davantage, le quatrieme encore plus, juſqu'à la clef où cet appui doit approcher d'une verticale, c'eſt-à-dire d'une ligne à plomb.

D'où il ſuit que dans les voûtes en dôme, il n'y a de lit plat & de niveau que celui de l'impoſte ; & comme l'inclinaiſon des lits doit être la même ſur chaque ſection verticale, il ſuit que les lits doivent être creux en portions d'un cône tronqué renverſé, dont le ſommet eſt en bas, au centre de la baſe de la voûte, ſi elle eſt exactement ſphérique, ou à quelque point de ſon axe, ſi elle eſt ſphéroïde ; ce qui occaſionne pluſieurs difficultés, qui ne ſont point dans une voûte ſphérique, laquelle eſt partout uniforme.

Ces difficultés ſont 1°. à l'égard des contours des vouſſoirs, que ſuppoſant une telle voûte, comme un demi-melon couché, ſuivant ſon axe, en ſituation horizontale, recoupé perpendiculairement ſuivant ſon axe, & à ſon axe en ſituation verticale en quatre parties, ſubdiviſées en rangs horizontaux & verticaux, aucune de ces parties n'eſt égale à l'autre, ni en grandeur, ni en contour dans chaque quart.

1°. En grandeur, parce qu'elles doivent toujours ſe reſſerrer en approchant de la clef, par des ſections verticales, c'eſt-à-dire *à plomb*, comme les côtes du melon vers leurs poles.

2°. En contour, parce que leurs arêtes faiſant partie de l'ellipſe de la baſe & de

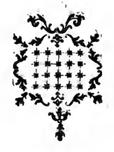
toutes les sections paralleles, celles qui approchent le plus du grand axe sont toujours plus concaves que celles qui approchent du petit ; ainsi elles sont toutes inégalement courbes horizontalement, & supposant le sphéroïde régulier, fait par la révolution d'une demi-ellipse, elles seront encore toutes de courbure inégale en hauteur, parce que nous démontrerons dans la suite, que toutes les sections planes inclinées à l'axe d'un sphéroïde régulier sont encore des ellipses ; de sorte que la même inégalité de contours des arêtes se trouve dans les joints montans, comme dans les joints de niveau, & que des huit arêtes qui bordent & comprennent un voussoir, il n'y en a aucune égale à l'autre.

De cette inégalité de contours, il est aisé de conclure celle des surfaces concaves & convexes de la doële & de l'extrados, & des lits concaves en dessus & convexes au dessous.

En voilà suffisamment pour donner une idée des difficultés qui se rencontrent dans l'art de la *coupe des pierres*.

On en auroit apperçu de nouvelles, si l'on avoit supposé de l'irrégularité dans le sphéroïde, comme dans cette espece de voûte, qu'on appelle en termes de l'Art, *voûte en cul-de-four surhaussé ou surbaissé sur un*

un plan ovale. Mais il nous suffit d'avoir présenté une idée générale de l'attention & des connoissances dont on a besoin pour l'exécution de cet Art, afin de prévenir le lecteur de la nécessité d'en étudier la théorie, si l'on veut agir avec connoissance de ce qu'on fait, & de ce qu'on doit faire, à laquelle théorie on ne peut parvenir que par un examen des *courbes* qui résultent des sections planes des corps ronds, & de celles qui se forment à la surface des mêmes corps, lorsqu'ils sont pénétrés par d'autres corps ronds, de même ou de différentes especes, en quoi consiste le premier Livre de ma Stéréotomie, dont je donne ici un abrégé.



CHAPITRE I.

Des Sections planes des corps réguliers.

§.

De la Sphere.

LA ſimplicité & l'uniformité de la ſphere n'admettent point de variété dans les ſections qu'on en peut faire, en la coupant par des plans ; en quelque ſituation qu'on les ſuppoſe, ils produiront toujours des cercles, la ſeule différence qui en peut réſulter, ne conſiſte qu'en plus ou moins de grandeur.

Si la ſphere eſt coupée par ſon centre, ils ſeront tous égaux, & appellés *majeurs* ; ſi elle l'eſt hors du centre, ils ſeront tous inégaux, & appellés *mineurs*, diminuant d'autant plus qu'ils ſeront éloignés du centre, tellement qu'ils ſe réduiront à un point à chaque pole.

On reconnoît ces différens effets, par la ſeule Géométrie naturelle ; cependant on en trouve la démonſtration dans la quinzieme propoſition du 3e Livre *d'Euclide*.

Pour donner une idée de la différence de ces cercles conſidérés aux ſurfaces concaves & convexes d'une voûte ſphérique,

il faut imaginer un demi-cercle AOB, tournant autour de son axe AB, dont la révolution forme une sphere parfaite: mais comme il n'est question pour notre objet que d'un hémisphere, il nous suffit de supposer un quart de couronne de cercle AORa faisant sa révolution autour du demi-axe AC; il est visible qu'elle formera un hémisphere creux, telle qu'est une voûte sphérique, divisée en plusieurs rangs de voussoirs horizontaux, si l'axe A C est vertical; si du centre C on tire aux divisions 1, 2, 3 des rayons C1, C2, C3, ils couperont le contour intérieur *ae*R aux points *d*, *e*, *f* qui déterminent les diametres des cercles horizontaux *hd*, *ie*, *lf* à la doële, & G3, H2, K1 à l'extrados, c'est-à-dire à la surface extérieure. Fig. 51

Où l'on voit que chaque rang de voussoirs est terminé par quatre cercles de rayons inégaux, sçavoir, deux au contour inférieur, l'un à la doële, l'autre à l'extrados, & deux au contour supérieur du même rang, l'un à la doële, l'autre à l'extrados, qui bordent le lit de dessus, sur lequel s'appuie le rang de voussoir auquel il sert de base. Fig. 51

Si au lieu de considérer la révolution d'un demi-cercle autour de son axe AB en situation verticale, c'est-à-dire à plomb

(en terme de l'Art), on ſuppoſe que cet axe eſt en ſituation horizontale, comme en DO, il ſe formera une ſphere égale en tout à celle de la ſuppoſition précédente, mais qui changera de nom, à cauſe que les rangs de vouſſoirs qui étoient horizontaux deviendront verticaux; alors leurs diametres étant perpendiculaires à l'horizon, c'eſt-à-dire à angle droit, la ſphere s'appellera droite, comme la ſphere du monde l'eſt à l'égard de ceux qui habitent ſous l'équateur; alors le point A, qui étoit le pole de la ſphere parallele, vient ſe placer en D à l'horizon, & le point B en O.

D'où il réſulte que les rangs de vouſſoirs qui tournoient autour d'une voûte de cette eſpece, ſont coupés par le milieu dans cette nouvelle ſituation par le cercle horizontal, dont DO eſt le diametre & le niveau de l'impoſte ſur laquelle s'appuient tous ces rangs de vouſſoirs, qui forment des arcades inégales, qui ne s'appuient plus les unes ſur les autres, mais ſe ſoutiennent ſur leur baſe plane horizontale chacune en particulier, les unes à côté des autres, comme l'arcade repréſentée par N3, 2*n* ſur ſa baſe N*n*, à côté de l'autre arcade *n*21V.

Il réſulte encore de ce changement de poſition de la voûte ſphérique, que dans

celle où les rangs de voussoirs sont horizontaux, il n'y a qu'un pole en A qui est au sommet de la pierre ronde du milieu, qu'on appelle la *clef*, & que dans la voûte en sphere droite, il y a deux poles en D & en O à l'extrados, & en P & en R à la doële, ou, au lieu d'un cercle entier, il n'y a qu'un demi-cercle, qui ne s'appelle plus une *clef*, mais un *trompillon*, comme on le voit représenté à la figure 6 en P, qui est à *l'imposte*, c'est-à-dire à la naissance de la voûte, appellée *voûte en niche*, ou *voûte en hemisphere droite*, c'est-à-dire dont les circonférences des joints de lit seront dans des plans verticaux, au lieu que dans l'exemple précédent ils étoient horizontaux; ce qui est exprimé par leurs rayons 1. V; 2. *n*; 3 N; AC à l'extrados, & *a*C, *et*, *fu*, &c. à la doële; de sorte que la voûte (comme l'hémisphere) dans cette situation a deux poles D & O, au lieu qu'elle n'en avoit qu'un en A dans la situation précédente; ce qui ne change cependant rien à la régularité de la figure, ni dans la concavité de sa surface intérieure, ni à la convexité de l'extérieure, ni à la direction des surfaces des lits coniques, qui tendent toujours au centre C de la sphere, comme dans l'exemple précédent, mais qui produit un effet tout différent dans la construction d'une voûte, Fig. 5.

en ce que chaque rang de voussoirs, faisant une arcade, peut se soutenir sans le secours de ses deux contigus; ensorte qu'on peut construire un quart, ou une moitié de cette voûte, sans être obligé de la faire complete. Cette partie s'appelle ordinairement une *niche*, dont la figure P S Q représente une moitié, au fond de laquelle P est le pole de tous les cercles du quart de sphere, représenté en profil par les quarts de cercle *as*, *bc*, &c. en élévation par les lignes droites o1; o2, &c.

Fig. 6. Si dans la même révolution du quart de cercle AOC sur son rayon AC on considere ce qui résulte de celle du triangle m3C, inscrit dans ce quart, on reconnoîtra que chacun des rayons des cercles mineurs, exprimés par la moitié de leurs diametres G3, hd, H2, ie, &c. sera aussi le rayon de la base d'un cône, dont le triangle G3c, hdC est celui de la section plane par l'axe de ce cône, & d3 une partie du côté C3 est le côté d'une zone de cône tronqué de sa partie hdC, qui est dans le vuide de la voûte; ce qui nous mene à la nécessité de prendre connoissance de la nature des cônes, & de leurs sections planes & solides, c'est-à-dire qui résultent de l'interfection de leurs surfaces, pénétrée par celle d'un autre corps, comme dans cet exemple, où la sphere est pénétrée par un cône.

CHAPITRE II.

Des Sections de cônes coupés par des plans.

APrès la ſphere, qui eſt de tous les corps le plus ſimple, en ce qu'il n'eſt enveloppé que par une ſurface courbe d'un contour toujours uniforme, le *cône* eſt le corps le moins compoſé, en ce qu'il n'eſt compris que par deux ſurfaces, l'une courbe, comme un cornet, l'autre plane, qui eſt ſa baſe, laquelle eſt le plus ſouvent un cercle, ſi le cône eſt droit, c'eſt-à-dire perpendiculaire ſur cette baſe, & régulier.

D'où il ſuit qu'il peut y avoir des variétés dans cette figure, provenant de la poſition reſpective des lignes génératrices de ces deux ſurfaces, ſelon leur diverſité de longueur & d'inclinaiſon mutuelle; ce qu'on peut facilement appercevoir par leur génération.

1°. Si l'on ſuppoſe qu'un triangle rectangle ACS ſe meut en tournant autour d'une de ſes jambes SC immobile, il tracera dans l'air, ou, ſi l'on veut le ſuppoſer, dans de l'argille, la cavité d'un cône, qu'on appelle *droit*, parce que l'angle ACS eſt droit, par la ſuppoſition; la ligne immo- *Fig. 7.*

bile S C, qui s'appelle *axe*, ne produit rien dans cette révolution, mais bien les deux autres; car A C produit un cercle, dont elle est le rayon, & A S la surface courbe, qui est la *conique*; la section plane A S *a* de ce corps s'appelle *le triangle par l'axe*, qui est le double de A S C, transporté en S C *a*.

Fig. 7. Il est visible que puisque le triangle générateur A S C est composé de trois lignes, il peut produire dans sa révolution des cônes, dont l'axe, le côté, & la base varient infiniment en longueur, d'où résulte autant de variété de l'ouverture de l'angle du sommet du cône, comme on voit en AS*a* & A P *a*, dont l'un est aigu, & l'autre obtus, sans cesser d'être des cônes droits, parce que l'axe S C est toujours perpendiculaire sur la base A*a*.

Fig. 8. Mais si l'axe du cône est incliné sur la base, comme S C sur OB, on ne peut plus désigner la génération du cône par la révolution d'un triangle, mais par la trace d'une ligne droite, comme une regle S B, appuyée sur un point S immobile, le long duquel elle coule pour parcourir par le bout B la circonférence d'un cercle O P B L représenté ici en perspective; ensorte qu'elle excéde toujours le point S, en parcourant la moitié B L O, comme on voit en O N,

égale à SB, & s'abaisse au contraire, en parcourant l'autre moitié de O en B par R. Cette espece de cône s'appelle *scalene*, qui peut aussi varier infiniment, suivant le plus ou le moins d'ouverture de l'angle OCS.

Les sections planes de ces deux especes de cônes sont cependant toujours les mêmes dans les cônes droits & scalenes, suivant la position du plan coupant, à l'égard de l'axe & de la base, comme nous allons le démontrer le plus briévement qu'il nous sera possible : car les courbes qui en résultent ont tant de propriétés, qu'on en voit de grands & amples Traités, sous le nom des *Sections coniques*; il nous suffit, pour en donner une notion générale, de dire qu'il y en a de cinq especes.

La premiere, lorsque le plan coupant passe par l'axe, est toujours un triangle rectiligne ASB, isoscele dans les cônes droits, & *Fig.* 7, 9. scalene dans les cônes scalenes OSB, si le *Fig.* 8, 10. plan coupant passe par l'axe & par la perpendiculaire SP abaissée du sommet sur le plan de la base OB.

Toutes les sections qui passent par le sommet S, comme ESF, GSH sont *Fig.* 9, 10. aussi des triangles, dont la base diminue d'autant plus qu'elle s'éloigne du centre C dans le rapport des cordes; ensorte qu'elle se réduit à un point, lorsque le plan ne fait

que toucher, & alors les deux côtés E S, S F, ſe réduiſent en une ſeule ligne droite A S.

Nous n'avons rien à dire de la figure de cette premiere eſpece de ſection rectiligne triangulaire, dont il eſt amplement traité dans les Elémens de Géométrie.

La ſeconde ſituation du plan coupant, lorſqu'il eſt perpendiculaire à l'axe du cône *droit*, ou oblique à l'axe du ſcalene, mais parallele au plan de la baſe, produit toujours un *cercle* plus petit que celui de cette baſe dans le rapport de ſa diſtance au ſommet, où le cercle devient ſi petit qu'il ſe réduit à un point.

Il faut ſeulement obſerver que l'on peut appeller *droit ſur ſa baſe* un cône ſcalene, dont on prolongeroit le plus petit de ſes côtés S B (qui ſe trouve dans le triangle O S B qui paſſe par l'axe & par la perpendiculaire S P) juſqu'à l'égaler au plus grand, en faiſant S R égal à S O, ou dont on retrancheroit du plus grand SO une quantité IO égale à l'excès de S O ſur S B : alors la baſe de ce cône devient une ellipſe, comme nous le dirons ci-après, & toutes les ſections perpendiculaires à l'axe ſeront auſſi des ellipſes, comme nous allons le démontrer, & non pas des cercles, comme nous venons de le dire du cône droit régulier.

Fig. 10.

Nous n'avons auſſi rien à dire de cette

seconde section circulaire, par la même raison que les propriétés du cercle sont expliquées & démontrées dans les Elémens de Géométrie.

La troisième des sections coniques est appellée *ellipse*, qui est un cercle alongé.

La quatrième est appellée *parabole*, qu'on peut considérer aussi comme une ellipse infiniment alongée.

La cinquième est une *hyperbole*, qu'on peut considérer comme une ellipse renversée du dedans au dehors : ce sont ces trois courbes dont nous devons donner une idée, parce qu'on les rencontre très-souvent dans la coupe des pierres : mais pour parvenir à en faire connoître les propriétés, il faut en expliquer les moyens.

Des points & lignes imaginés dans les sections coniques pour en montrer les propriétés.

Les courbures des lignes étant variables à l'infini, on n'a pu imaginer de meilleur moyen pour en chercher les propriétés, & en trouver autant de points que l'on veut pour les décrire, que d'en comparer de petites parties à deux lignes droites qui les coupent, dont les angles qu'elles font entr'elles sont connus, ainsi que le rapport de leurs longueurs, auxquelles se terminent

les parties courbes, qui sont ordinairement considérées comme les hypoténuses d'un triangle rectangle, & quelquefois comme un côté opposé à un angle aigu ou obtus donné d'ouverture.

Les points remarquables dans ces courbes sont les *centres* & les *foyers*, & ceux d'*attouchemens*. Les lignes sont les *diametres*, les *axes*, les *ordonnées*, les *abscisses*, les *tangentes*, & les *soutangentes*. On en donnera les définitions dans l'explication de chacune de ces courbes.

§. *De la Section elliptique.*

Si un cône ASB droit ou scalene est coupé par un plan EL incliné à celui de sa base AB, la figure qui provient de cette section est appellée *ellipse*, représentée ici
Fig. 11. en perspective par la courbe EHGLO*n*.

La section de ce plan, avec le triangle par l'axe, coupé perpendiculairement, est la ligne EL, qu'on appelle le *grand axe*, dont le milieu *m* est appellé le centre. Si l'on suppose dans le plan coupant une perpendiculaire PK sur le milieu de ce grand axe EL, on l'appelle le *petit axe*, les autres perpendiculaires à ce grand axe, comme R*n*, *ro* sont appellées *ordonnées*, les intervalles RL, *r*L de ces ordonnées à une des

extrêmités L de cet axe ſont appellées *abſciſſes*, du mot latin *abſcindere*, qui veut dire couper.

Il faut montrer la différence qu'il y a de cette ſection elliptique du cône avec la ſection circulaire, en comparant l'une & l'autre dans le même cône.

Soit A S B le triangle par l'axe d'un cône la ligne L E inclinée au diametre de la baſe B A, enſorte qu'étant prolongée elle puiſſe la rencontrer en X, laquelle L E ſoit la ſection d'un plan perpendiculaire à celui du triangle, par l'axe du cône A S B : ſoit dans le même, une ligne D F la ſection d'un plan parallele à celui de la baſe, qui eſt un cercle D O F G, dont le diametre D F coupe l'axe de l'ellipſe E L au point *r*; la ligne *ro*, qui eſt l'interſection de ces deux plans qui ſe croiſent, ſera perpendiculaire à celui du triangle par l'axe, & aux deux diametres E L, D F; par la même raiſon, ſi l'on ſuppoſe encore un plan parallele à la baſe A B, la ſection R I H *n* I ſera encore un cercle, & R *n* perpendiculaire aux diametres H I & E L. Cela ſuppoſé, on reconnoîtra que ces diametres des deux cercles croiſant l'axe de l'ellipſe, formeront des triangles ſemblables, L *r* F & L R I, & leurs oppoſés aux ſommets E R H & E *r* D; d'où l'on tire les analogies ſuivantes : *Fig.* 11.

$Lr : rF :: LR : RI$, & celle-ci $Er : rD :: ER : RH$: donc en multipliant l'une par l'autre $Lr \times Er : rF \times rD :: LR \times ER : RI \times RH$.

Mais dans le demi-cercle DOF on a * $Dr \times rF = \overline{rO}^2$, & dans l'autre demi-cercle HnI, on a $RI \times RH = \overline{Rn}^2$ ** : donc $Lr \times rE : \overline{rO}^2 :: LR \times RE : \overline{Rn}^2$; ce qui eſt la propriété de l'ellipſe qui la diſtingue du cercle, ce que nous avons cherché.

COROLLAIRE.

D'où il ſuit que ſi l'on prend la diſtance
Fig. 11. ER égale à Lr, les ordonnées rO & Rn qui ſeront à diſtances égales des extrêmités de l'axe, ſeront auſſi égales entr'elles ; ce qui démontre l'erreur de ceux qui penſent que le contour de l'ellipſe, du côté du ſommet S, doit être plus ſerré que du côté de la baſe A, ainſi qu'*Albert Duret* le dit dans ſon Livre intitulé *Inſtitutiones Geometricæ, fol. Arnhemiæ* 1606.

Il y a pluſieurs autres propriétés dans l'ellipſe qu'il eſt néceſſaire de connoître pour la tracer méchaniquement & géométriquement : la plus remarquable eſt, qu'il y a dans ſon grand axe AB deux points,

* *Eucl.* Liv. 3, Prop. 35.
** *Eucl.* Liv. 6, Prop. 13.

F & *f*, qu'on appelle *foyers*, lesquels sont éloignés de l'extrêmité D du petit axe d'un intervalle D F ou D *f*, égal à la longueur A C du demi-axe; d'où il suit pour cette partie, que la somme des lignes tirées des deux foyers F D & D *f* est égale à la longueur totale de l'axe : cette propriété s'applique aussi à tous les autres points de la courbe, par exemple G, car F G & G *f* prises ensemble, sont égales au même axe A B. *Fig.* 12.

L'autre propriété de l'ellipse est, que si l'on tire dans une ellipse faite D H I G des lignes R P, *rp* paralleles, & qu'on les divise en deux également en *n* & *m*, la ligne D I qui passe par ces milieux, s'appelle un *diametre*, dont le milieu C est le centre de l'ellipse, & la ligne qui la croise en passant par le centre, comme H G, est encore un diametre, qu'on appelle *conjugué du précédent*, si cette ligne est parallele aux lignes R P, *rp*; une ligne N T parallele à H G, & passant par l'extrêmité I du premier diametre, est une *tangente* de l'ellipse en ce point. De toutes ces propriétés nous déduirons les pratiques dont on fera usage au second Livre pour décrire cette courbe, qui est sans contredit la plus usuelle dans la *coupe des pierres*. *Fig.* 13.

Observation sur les sections d'un cône creux d'épaisseur uniforme, coupé obliquement au plan de sa base.

Il semble du premier abord, que si l'on coupe un cône creux d'une épaisseur, partout égale, les deux sections elliptiques qui se font aux surfaces concaves en dedans, & convexes en dehors, par un plan qui le traverse obliquement, devroient avoir leurs circonférences équidistantes & concentriques; mais il n'en est pas de même quand on les regarde avec des yeux géométriques, & même à la seule inspection du corps coupé ASB$b\dot{s}a$.

Fig. 14. Pour le démontrer sans peine, soit cd l'axe d'une ellipse, on aura l'angle Scd> SAB & Sdc < SBA: tirés par le point s, CD parallele à cd, & gh parallele à AB, les lignes sh, sD, partant du point s, & tombant sur SB, sont d'autant plus grandes, qu'elles s'éloignent de la perpendiculaire; puisqu'on a l'angle CDS < shS, l'on aura SD > sh par le même principe Cs < sg; mais sh = sg: donc Cs < sD, ou ce < fd. C. Q. F. D.

USAGE.

Comme l'ellipse est la courbe la plus ordinaire dans la coupe des pierres, & que les

les voûtes coniques, qu'on appelle *trompes*, sont des corps creux d'épaisseur uniforme, on aura occasion plusieurs fois de faire usage de cette observation.

De la Section parabolique.

Nous avons parlé des courbes qui résultent des sections d'un plan coupant le cône, ou parallélement à sa base, ou obliquement à cette même base, de maniere qu'il coupe les deux côtés du cône, ce qui nous a produit le cercle & l'ellipse, qui sont des courbes fermées, c'est-à-dire qui viennent à se réunir.

Nous allons examiner présentement ce plan coupant en situation parallele à un côté SB, ensorte qu'il ne coupe que son opposé AS; d'où il résulte que cette courbe, qu'on appelle *parabole*, demeure ouverte sans pouvoir se refermer, en quoi elle differe de l'ellipse, comme on va le voir en examinant ses propriétés.

Soit ASB le triangle par l'axe d'un cône coupé perpendiculairement au plan de ce triangle par un autre plan PRL, dont l'intersection est la ligne Px parallele à SB; il faut trouver le rapport des ordonnées or, xR à l'axe Px, avec les abscisses Po, Px. *Fig. 15.*

Soit un troisieme plan HI parallele à la

bafe AB, dont la fection eft un cercle HrI, & dont le diametre HI coupe au point o l'axe Px de la parabole, & fon plan fuivant une ligne ro, qui eft une perpendiculaire commune à cet axe, & au diametre HI du cercle, comme dans la propofition précédente à l'égard de l'ellipfe.

Par la propriété du cercle, on a $\overline{xR}^2 = Ax \times xB$ à la bafe, & $\overline{or}^2 = Ho \times oI$; mais $oI = xB$, à caufe des paralleles ox, IB: donc $\overline{ro}^2 = Ho \times xB$; d'où l'on tire $\overline{Rx}^2 : \overline{ro}^2 :: Ax \times xB : Ho \times xB$: mais ces deux rectangles ayant la hauteur commune xB, font entr'eux comme Ax, Ho: donc $\overline{Rx}^2 : \overline{ro}^2 :: Ax : Ho$, & à caufe des triangles femblables AxP, HoP, on aura $Ax : Ho :: Px : Po$. Donc les quarrés des ordonnées Rx & ro font entr'eux comme les abfciffes Px & Po; ce qui eft la propriété de la parabole qu'on cherche pour la diftinguer de l'ellipfe.

USAGE.

La parabole eft une courbe qui fe préfente rarement dans la pratique de la coupe des pierres, excepté dans peu de cas, comme dans les ceintres de face des trompes fur le coin.

De la Section hyperbolique.

Nous avons examiné les courbes qui résultent à la surface des cônes, lorsque le plan coupant est situé parallélement ou obliquement à celui de la base, & parallélement à un des côtés. Il nous reste à examiner celle qui résulte de la section faite par un plan parallele à l'axe, ou qui le rencontre hors du cône, qu'on appelle *hyperbole*, laquelle est comme la parabole, toujours ouverte, quand même elle seroit prolongé à l'infini.

Les propriétés de cette section ne peuvent être reconnues dans un seul cône, il faut en supposer un second, opposé au sommet, par la prolongation des côtés du premier qui se croisent à ce sommet.

Soit ASB le triangle par l'axe d'un cône, dont les côtés AS & BS prolongés en F & G, forment un cône semblable FSG. *Fig. 16.*

Soit aussi un plan HYP qui le coupe parallélement à l'axe SC du cône, & perpendiculairement au triangle par l'axe ASB, ensorte que la ligne xH soit la commune intersection de ces plans, elle sera aussi une partie de la section hyperbolique, tracée ici en perspective en YHP; si on la prolonge, elle rencontrera en I le côté du cône FSG, opposé au sommet du premier, &

la partie HI entre les deux cônes, s'appellera *le premier axe de l'hyperbole*, le point H son sommet, les lignes *ro* & Y*x* seront des *ordonnées* à cet axe, & les lignes HO & HX les *abscisses* de l'axe prolongé.

Soit aussi un autre plan D*n*E parallele à la base APB, dont la section dans le cône est un cercle qui coupe celui de l'hyperbole, suivant une ligne R*r*: il est visible, comme dans les sections précédentes, que les lignes d'intersection de ces deux plans circulaires YP, *r*R, avec le troisieme hyperbolique, seront perpendiculaires à la section IX de ce plan, avec celui du triangle, par l'axe du cône, laquelle est l'axe de l'hyperbole, & par conséquent à celle des diametres des cercles AB, DE; d'où il suit que leurs moitiés *or*, XP ou YX sont des ordonnées communes à ces cercles, & à l'axe IH prolongé de l'hyperbole, qui est entre les deux cônes, hors de cette courbe, en quoi il differe de ceux de l'ellipse & de la parabole qui sont au dedans.

A cela près, les propriétés de l'hyperbole sont les mêmes renversées que dans l'ellipse, sçavoir, que les quarrés des ordonnées O*r*, IX sont entr'eux comme les rectangles des abscisses HO × IO, & HX × IX, comme nous allons le démontrer.

A cause des triangles semblables IOE,

IXB, on aura $OE:XB::IO:IX$; & les triangles ſemblables HDO, HAX donneront $DO:AX::HO:HX$, d'où l'on tire, par la multiplication, $DO\times EO:XA\times BX::HO\times IO:HX\times IX$; mais les cercles, par leur nature, fourniſſent $\overline{XY}^2 = AX\times BX$, & $\overline{Or}^2 = DO\times EO$: donc par ſubſtitution $\overline{Or}^2 : \overline{XY}^2 :: HO\times IO : XH\times IX$. C. Q. F. D.

USAGE.

Cette courbe ſe trouve rarement dans les *traits* de la coupe des pierres, on ne la reconnoît que dans quelques cas de *trompes* à pans & de rencontres d'arrieres vouſſures avec les pieds droits, &c.

Corollaire général des Sections des cônes.

Il ſuit de ce que nous avons dit des différentes poſitions des plans coupant les cônes.

1°. Que celles qui forment les ellipſes étant variables dans leur obliquité, à l'égard de la baſe, elles peuvent être infiniment alongées, ſuppoſant les côtés du cône infiniment prolongés, juſqu'à ce que ce plan devenant en ſituation parallele à un côté, la courbe ne peut plus rentrer en

elle-même & se fermer, alors elle devient parabole.

2°. Que puisque la position de ce plan est déterminée pour former la parabole, toutes celles qui seront formées dans le cône plus près ou plus loin du côté du cône, auquel le plan coupant doit être parallele; toutes ces courbes de section seront semblables, étant semblablement possées dans le cône.

3°. Que depuis ce parallélisme jusqu'à ce que le plan coupant s'approche tellement du côté, qu'il se couche sur le cône, il peut former une infinité d'hyperbolesdifférentes plus ou moins ouvertes.

REMARQUE.

Il est encore nécessaire d'observer qu'une section conique quelconque peut être adaptée à une infinité de cônes différens. Cette proposition est démontrée dans le premier tome de ma Stéréotomie, au 2e théorême du premier Livre.

Pour montrer que l'on peut appliquer à toutes sortes de voûtes coniques tel ceintre de face qu'on jugera à propos, avec telle position ou inclinaison de l'axe qu'on voudra, par exemple, faire une *trompe* de niveau ou en rampe, dont le ceintre de face soit elliptique, surhaussé ou surbaissé, & même si l'on vouloit parabolique ou hyperbolique.

CHAPITRE III.

Des Sections des Cylindres coupés par des plans.

ON diftingue les cylindres, comme les cônes, par la pofition de leurs axes fur leurs bafes. Si l'axe eft perpendiculaire au plan de la bafe, il s'appelle *droit*, s'il lui eft oblique, on le nomme *fcalene*.

La génération du cylindre *droit* eft exprimée par la révolution d'un parallélogramme ABDX rectangle, tournant autour d'un de fes côtés AX, qui en eft *l'axe*. Les deux côtés DX & BA forment par cette révolution deux cercles égaux, qu'on appelle *bafes* indifféremment, mais plus particuliérement celui qui eft en bas; & enfin la ligne BD trace dans l'air la furface ronde du cylindre concave en dedans, du côté de l'axe AX, & convexe en dehors, ce qu'on diftingue, en terme de l'Art, par *tour creufe* & *tour ronde*. *Fig. 17.*

La génération du cylindre fcalene, qui ne peut s'exprimer de même par une révolution de parallélogramme, doit être confidérée comme le mouvement d'une ligne droite, toujours parallélement à elle-même *Fig. 18.*

autour d'un cercle, au plan duquel elle eſt inclinée.

La ſection d'un cylindre coupé par un plan, ne peut varier que de trois manieres par les différentes poſitions de ce plan.

1°. S'il eſt parallele à l'axe du cylindre, la ſection ſera toujours un parallélogramme plus ou moins large, ou étroit, ſelon qu'il s'approchera ou s'éloignera de l'axe dans le rapport des cordes du cercle de la baſe.

D'où il ſuit que le plus large de tous eſt celui qui paſſe par l'axe, & le plus étroit celui qui ne fait que toucher qui ſe réduit à une ligne.

2°. Si le plan coupant eſt parallele à la baſe, la ſection ſera un cercle, ou une ellipſe, ſi la baſe eſt elliptique, comme elle peut l'être, ſi l'on veut; on peut même la faire de toute autre courbe, mais alors on l'appellera *cylindroïde*, c'eſt-à-dire ſemblable à un cylindre.

3°. Si le plan coupant eſt incliné à l'axe ou à la baſe du cylindre *droit*, la ſection ſera une ellipſe.

Dans le cylindre ſcalene, cette poſition peut produire un cercle en certaine circonſtance d'une ſection, appellée *ſous-contraire*, qui eſt celle où un plan N.T. perpen-
Fig. 18. diculaire au parallélogramme D E B A, fait

avec le côté AD un angle DNT égal à l'angle ABE que fait le plan de la base AB avec le côté BE; ce qui rend le diametre NT de la section égal à celui de la base AB; ce qui est visible, parce que les deux lignes AB, NT sont également inclinées entre les deux paralleles AD, BE, comme il est démontré dans les Elémens de Géométrie: donc les diametres étant égaux, les cercles le sont aussi: excepté ce cas, la section oblique est toujours une ellipse, qu'on peut considérer comme un cercle alongé, parce que toutes ses ordonnées sont égales à celles du cercle, seulement un peu plus écartées entr'elles proportionnellement, comme on va le démontrer.

Soit AB le diametre du cercle de la base, & AE le grand axe d'une ellipse A*d*E, qui est la section oblique d'un plan A*d*EL perpendiculaire au triangle, par l'axe AEB; par conséquent toutes les lignes tirées dans ces deux plans, perpendiculairement à leur intersection avec le triangle par l'axe, seront paralleles entr'elles par la 16e prop. du 11e Liv. d'*Euclide*, & égales aussi, parce qu'elles sont terminées par les côtés D*d*: 2.*e* du cylindre: donc toutes les ordonnées correspondantes du cercle à l'ellipse, sçavoir CD, *md*, N2, *no* sont égales. C. Q. F. 1°. D. *Fig. 19.*

Secondement elles sont écartées propor-

tionnellement à leur distance des abscisses dans le cercle : car AC : Cm :: AB : BE :: AN : An, puisque tous ces triangles sont semblables ; ce qu'il falloit secondement prouver : donc la section oblique d'un cylindre est une ellipse, qui peut être appellée un cercle *ralongé*, comme les ouvriers l'appellent, lorsqu'ils disent la *cerche* ralongée; car ce mot de cerche est une corruption de l'Italien *cerchio*, qui veut dire un cercle. Il est vrai que c'est suivant l'écriture, & non suivant la prononciation, qui est *tcherkio.*

D'où l'on doit conclure que la cylindrique est la même que la conique, parce que si l'on y fait attention, on reconnoîtra que les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les rectangles faits des abscisses l'une par l'autre, puisque les racines de ces rectangles sont proportionnelles à celles des rectangles faits des abscisses du cercle.

Cette remarque n'est pas inutile pour les gens qui ne sont pas un peu Géometres, qui s'imaginent communément que ces ellipses sont différentes, comme nous l'avons montré par l'erreur d'*Albert Duret* *, fameux Peintre qui a écrit sur la Géométrie pratique.

* Voyez la Stéréotomie, tome 1, page 185.

Des Sections elliptiques, des cylindres creux & d'épaisseur uniforme.

On a vu ci-devant, dans l'examen des ſections des cônes creux, que les ellipſes formées par la ſection d'un plan oblique à la baſe du cône, aux ſurfaces & arêtes intérieures & extérieures, n'étoient ni *concentriques* ni *équidiſtantes*, & que l'axe commun aux cônes de ces deux ſurfaces ne paſſoit pas par leurs centres.

Il n'en eſt pas de même des ſections du cylindre creux : les deux ellipſes des ſurfaces concaves & convexes ſont concentriques, mais leurs contours ne ſont pas équidiſtans, non autant que dans le cône, où il y a de l'excentricité, mais dans leur diſtance entre les deux axes, qui eſt toujours inégale dans chaque quart d'ellipſe, excédant la juſte épaiſſeur, depuis le petit axe juſqu'au grand, où elle eſt auſſi la plus grande.

Soit un demi-cylindre creux ALEB, d'épaiſſeur uniforme, exprimé à la baſe par les deux cercles concentriques AHB, *a* I *b*, *Fig.* 20. repréſentés ici en perſpective, ſur leſquels ſont élevées des perpendiculaires BE, *b*F, *a*D, juſqu'à la rencontre de l'axe AE de l'ellipſe ou ſection oblique ALE, repré-

ſentée auſſi en perſpective. Il eſt évident, à cauſe des paralleles, dans le triangle AEB, que AB : AE :: Ab : AF :: FK : FE :: Aa : aD : donc FE excede l'épaiſſeur du cylindre bB, comme l'axe de l'ellipſe excede le diametre de la baſe du cylindre.

Si l'on ſuppoſe un plan coupant perpendiculaire à celui du triangle par l'axe AEB, la ſection LmCo ſera un parallélogramme LGno, dont les côtés oppoſés ſeront égaux, étant entre mêmes paralleles; par conſéquent l'épaiſſeur LG de la ſection oblique ſera égale à l'épaiſſeur on de la baſe égale (par la ſuppoſition) à bB = FK, mais FE eſt plus grand que FK, par conſéquent que LG. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Il ſuit delà qu'ayant l'intervalle d'un point d'une ellipſe extérieure ou intérieure d'un côté du diametre, dans un quart d'ellipſe, on trouvera leurs diſtances oppoſées à peu près comme celles des aſymptotes, des hyperboles; ce qui a fait que M. de la *Hire*, dans ſon grand Traité des Sections coniques, appelle ces ellipſes *compagnes* dont nous parlons, *aſymptotiques*, expreſſion dont je me ſervirai.

Remarques de pratiques.

On voit par cette démonſtration, concernant les ellipſes aſymptotiques, que ceux qui font des ceintres elliptiques, ou plutôt en *anſe de panier*, par une imitation de différens arcs de cercles raſſemblés, ſuivant le plus fréquent uſage des Artiſans, & même des Architectes, dont le contour intérieur & l'extérieur ſont paralleles, ne peuvent embraſſer une épaiſſeur de voûte uniforme & égale partout; car la diſtance des grands axes entr'eux étant plus grande que celle des extrêmités des petits axes, ſi les arcs de cercles concentriques (par conſéquent toujours équidiſtans) ſont pris à la meſure de la juſte épaiſſeur, le ceintre extérieur ne pourra atteindre à celle du côté du grand axe, ſoit aux impoſtes de la voûte, ſi elle eſt ſurbaiſſée, ou à la clef, ſi elle eſt ſurmontée.

C'eſt faute de connoiſſance de cette théorie que le P. *Deran* & la *Rue* ſont tombés dans de grandes erreurs de *traits* de la *coupe des pierres*, lorſqu'il s'eſt agi de faire des voûtes ſphéroïdes & ellipſoïdes, comme je l'ai fait remarquer dans ma Stéréotomie, *tome* 2, *l.* 4, *ch.* 7.

Secondement, il ſuit que l'on ne peut faire deux contours d'ellipſes concentriques

paralleles entr'eux, comme pour un bandeau ou une archivolte, & que dans la pratique, lorsqu'on y est obligé, il faut tracer à la principale, une courbe en *épicicloïde*, par des attouchemens d'arcs de cercles, de rayons égaux à la largeur donnée, pour l'intervalle d'une courbe à l'autre.

CHAPITRE IV.

Des Sections planes de quelques corps ronds, réguliérement irréguliers.

SI l'on imagine qu'une ligne courbe quelconque fait une révolution autour d'un axe, d'une tangente, ou de quelqu'autre position donnée, il se formera autant de corps différens que l'on voudra prendre de courbes & de points, ou de lignes de révolutions : ainsi l'on peut dire que le nombre des différentes figures de corps est infini ; mais comme nous ne devons faire mention que de ceux qui peuvent convenir à la construction des voûtes, nous nous bornerons aux plus ordinaires & usuelles, sçavoir, 1°. aux *sphéroïdes*, 2°. aux *ellipsoïdes*, 3°. aux *conoïdes*, 4°. aux *cylindroïdes*, 5°. aux *annulaires*, 6°. aux *heliçoïdes*, 7°. aux *coin-conoïdes*, desquels nous allons examiner les générations & les sections planes de chacun en particulier.

§ I.

Des Sections des Sphéroïdes coupés par des plans.

Si l'on ſuppoſe qu'une demi-ellipſe AB*x* tourne autour de ſon grand axe A*x* immobile, le corps formé en l'air par la trace de cette révolution, ſera un ſphéroïde *alongé* comme un œuf; & ſi elle tourne autour de ſon petit axe B*b*, elle produira un ſphéroïde *applati* comme un oignon, dont la moitié AB*x* repréſente cette eſpece de voûte, qu'on appelle en terme de l'Art, *voûte en cul-de-four ſurbaiſſée* AB*x* (*fig.* 22) & BA*b* (*fig.* 21, *pl.* 2) ou (*pl.* 1, *fig.* 3 & *fig.* 4). Fig. 21.

1°. Si l'un ou l'autre de ces corps eſt coupé par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution, qui eſt immobile, les ſections ſeront toujours des cercles de rayons inégaux, tels ſont *or*, *or* dans le ſphéroïde *alongé*, & *er*, *er* dans le ſphéroïde applati.

2°. Si ces corps ſont coupés par des plans paralleles à l'axe immobile, leurs ſections ſeront des ellipſes ſemblables à la génératrice, à laquelle elles ſeront *aſymptotiques* d'inégale grandeur, mais proportionnelles, comme SV*ou*, dont le quart de la figure *ſu* ~~eſt circonſcrit à la corde *ſu*~~, parallele à la corde AB de l'ellipſe extérieure.

3°. Si ces corps sont coupés par des plans inclinés aux axes, leurs sections seront encore des ellipses plus ou moins grandes, selon qu'elles seront plus ou moins inclinées au grand axe, & plus près ou plus loin du centre. Cette vérité est démontrée dans ma Stéréotomie au Liv. I, Théor. V, p. 34, Edit. de Strasbourg; les deux premieres n'ont pas besoin de démonstration, pour peu d'attention qu'on y donne.

Usage.

Cette proposition fait voir qu'une voûte en cul-de-four surhaussée ou surbaissée, a des joints de deux especes, ceux des *lits* des rangs de voussoirs sont toujours circulaires par la supposition de la génération du sphéroïde, dont les points de la circonférence elliptique tournent horizontalement, & d'autres elliptiques, qui sont les *joints de tête* ou *de doële*, montans, & tendant à un pole au sommet du demi-axe de révolution, qui sont dans leur étendue intérieure des sections de plans inclinés aux axes.

§ II.

Des Ellipsoïdes coupés par des plans.

Nous distinguons les ellipsoïdes des sphéroïdes, en ce que ceux-ci participent de la sphere

ſphere dans leur génération, qui donne toujours des cercles par la révolution des points de leurs circonférences horizontales.

Les ellipſoïdes, au contraire, ne ſont formés par aucune révolution circulaire, mais ſuivant le contour d'une baſe elliptique qui s'approche & s'éloigne de ſon axe vertical; de ſorte que toutes les ſections planes poſſibles ſont toujours des ellipſes; ce qui rend une voûte de cette eſpece très-difficile dans l'exécution, & où tous les Auteurs des Traités de la coupe des pierres ſont tombés dans de grandes fautes de conſtruction: on l'appelle, en terme de l'Art, *voûte ſphérique ſurhauſſée ou ſurbaiſſée ſur un plan ovale.* Nous en avons donné une correcte au ſecond tome de la Stéréotomie (4e Part. page 400, *édit. de Strasbourg*).

§. III.

Des corps conoïdes coupés par des plans.

Si l'on ſuppoſe une des ſections coniques ouvertes, parabole ou hyperbole, tourner ſur ſon axe, il ſe formera par cette révolution un corps que nous appellons *conoïde*.

Il eſt évident, par cette génération, qui eſt la même que celle des ſphéroïdes, que les ſections planes perpendiculaires à cet axe ſeront des cercles; mais il n'eſt pas ſi

facile de concevoir, que celles qui sont faites dans cette espece de sphéroïde-conoïde, par des plans inclinés à cet axe, sont des *ellipses*: cependant on en peut voir la démonstration au théor. 5 du premier Livre de ma Stéréotomie, à laquelle je crois pouvoir renvoyer le lecteur, parce que des voûtes de cette espece ne sont du tout point ordinaires dans la construction des édifices.

§. IV.

Des Cylindroïdes coupés par des plans.

Nous appellons cylindroïdes tout corps qui n'a pas pour base un cercle, ni une ellipse, mais une courbe quelconque, sur le plan de laquelle on suppose une perpendiculaire se mouvoir parallélement à elle-même, en parcourant le contour de cette courbe.

Il est évident que si le plan coupant est perpendiculaire à l'axe, ou parallele à la base si le cylindroïde est scalene, la section sera semblable & égale à celle de la base, étant comprise partout entre mêmes paralleles.

Il suit encore delà que si le plan est incliné à la base, la section ne sera plus égale; mais elle sera encore semblable au contour de la courbe de la base, quelle qu'elle puisse

être, si elle est plane, parce que les côtés du cylindroïde étant toujours paralleles entr'eux, couperont des parties proportionnelles de cette base; ce que nous avons démontré au théor. 3 du premier Livre de la Stéréotomie.

On trouvera une application de ce principe dans la pratique au 4e Livre.

§. V.

Des Cylindroïdes annulaires coupés par des plans.

Si l'on fait tourner un cercle autour d'une perpendiculaire à l'extrêmité de son diametre, laquelle est une tangente, il se formera, par cette révolution, la figure d'un *anneau fermé*, c'est-à-dire sans ouverture au milieu, dont cette *tangente* est l'*axe*, qui doit être dans le même plan que le cercle. Si la perpendiculaire AX n'est pas immédiatement à l'extrêmité du diametre DB, mais sur sa prolongation à une distance donnée, comme en X, l'anneau qui sera formé par cette révolution, s'appellera *ouvert* de l'intervalle FD, qui est le diametre de la révolution circulaire F*m*D du point D, lequel demi-cercle F*m*D est dans un plan perpendiculaire à l'axe AX, & par conséquent au plan du cercle générateur *Fig. 23.*

DEB, qui eſt dans le même plan que l'axe AX.

On peut ſuppoſer auſſi un autre mouvement que le circulaire autour de l'axe AX, par exemple, un elliptique faiſant mouvoir le centre C ſur une ellipſe PLC perpendiculaire au plan du cercle générateur, en dirigeant le diametre DB à cet axe, perpendiculairement aux tangentes de tous les points du contour de cette ellipſe.

Il nous ſuffit ici de conſidérer un demi-cercle DEB pour repréſenter le ceintre d'une voûte, & une moitié de révolution qui conclut pour la révolution entiere.

Lorſque l'anneau eſt preſque fermé, enſorte qu'il n'y ait au milieu que l'épaiſſeur d'un pilier, on appelle la voûte de cette figure, *voûte ſur le noyau ;* mais ſi l'ouverture eſt grande, on doit l'appeller *berceau tournant*; c'eſt ainſi que ſont faits la plûpart des *bas côtés des Egliſes*, autour du *chœur* arrondi en *abſide*, ſuivant l'ancien uſage des *baſiliques*.

Au lieu du cercle générateur DEB, on peut ſuppoſer une *ellipſe* ou *anſe de panier*, ſurmontée ou ſurbaiſſée, d'où il réſulte un anneau applati ou élevé au-delà du plein ceintre.

De quelque courbe que ſoit le ceintre générateur mobile, les ſections de ces an-

neaux, coupés par des plans verticaux, dirigés au centre de révolution, feront toujours des courbes planes, égales à celle du cercle, ellipfe, ou ovale génératrice; puifque c'eft de fon mouvement & pofition à l'égard de ce centre que réfulte la figure annulaire.

Mais fi le plan coupant eft fuppofé encore vertical & perpendiculaire à celui de la bafe de révolution, fuppofée horizontale, comme G H I K L, qui coupe le rayon X N de la bafe perpendiculairement en M, il fe formera par cette fection une courbe ondée G H I K L, qui fera plus ou moins abaiffée à fon milieu I, felon que le plan coupant G L I s'approchera ou s'éloignera du centre de révolution C; enforte que fi la fection horizontale, par exemple, R O n'atteint pas au milieu M de la circonférence moyenne, l'ovale O S R ne fera point pliée à fon fommet S: ainfi cette courbe devient fort différente de la précédente; cependant elle eft toujours de même nature, du 4e *ordre*, comme il eft démontré au premier Livre de ma Stéréotomie, théor. 6, page 37 de *l'édit. de Strasbourg*, où les curieux pourront en voir le calcul algébrique. Nous donnerons au fecond Livre une maniere très-facile de la décrire.

USAGE.

Les berceaux tournans qui sont des voûtes annulaires, sont très-communs, comme je l'ai dit, dans nos Eglises: la section plane, dans la derniere circonstance, l'est beaucoup moins; cependant elle s'y rencontre encore quelquefois, lorsqu'il se trouve au chevet un pan de mur de clocher ou de sacristie, qui est droit, coupant la voûte du bas côté, ou une arcade plane, ouverte au fond pour la baie d'une chapelle, qu'on y pratique assez souvent.

§ VI.

Des corps heliçoïdes coupés par des plans.

Ce qu'on appelle ainsi en Géométrie, est nommé *vis* en architecture. Or une voûte en *vis* est un berceau *tournant & rampant*, si le vuide du milieu est un peu grand; & si ce milieu est plein d'un pilier ou noyau, qui sert à porter la moitié intérieure du berceau, elle s'appelle *vis S. Giles*; cette figure peut être comparée à un rouleau de corde tournée en vis autour d'un bâton, & celle du berceau tournant & rampant à un *tire-bourre*, dont le milieu est vuide.

Les sections de ces corps coupés par des plans dans les mêmes circonstances que les

annulaires, n'en different en rien pour les propriétés intrinſeques, mais ſeulement en ce que les axes de ces courbes ſont, l'un horizontal, comme ON, l'autre rampant, c'eſt-à-dire incliné à l'horizon, comme OR, & que les ordonnées au premier, à angle droit, ſont obliques au diametre OR, mais toujours égales en longueur, & poſées proportionnellement dans le rapport des axes ON & OR. *Fig. 24.*

USAGE.

Les voûtes héliçoïdes ou en vis, ſont très-communes dans les anciens bâtimens ſur les eſcaliers : elles ſont plus rares dans l'architecture moderne, où l'on fait peu d'eſcaliers tournans voûtés, à cauſe de l'inégalité des largeurs de giron, qui ſont trop étroits au collet, & trop larges à la queue.

CHAPITRE V.

Des Sections planes du coin-conoïde.

IL eſt une ſorte de corps réguliérement irréguliers, dont on ne fait pas mention dans les Elémens de Géométrie, mais dont il eſt néceſſaire de connoître les propriétés applicables à la conſtruction de ces petites

voûtes, qu'on appelle *arriere-vouſſures*, qui ſont préciſément de la même figure, lorſqu'elles ſont *réglées & bombées*, dont voici la génération.

Fig. 25. Soit un parallélogramme quelconque ABED, ſur un côté duquel AB eſt élevé à angle droit un demi-cercle, ou un arc de cercle moindre AHB; ſi l'on fait mouvoir une ligne droite HM, appuyée ſur cet arc par un bout H, & par l'autre ſur le côté DE en M, enſuite en RN perpendiculairement ſur une ligne ON parallele à BE, & ainſi de ſuite par tous les points de l'arc AHB, cette ligne parcourra en l'air un eſpace compris entre la ſurface plane du parallélogramme, & la ſurface courbe engendrée par la trace de la ligne droite inégalement penchée à l'égard de ce plan, leſquelles deux ſurfaces, avec celle du demi-cercle AHB, comprendront un eſpece de ſolide, comparable en partie à un coin, dont DE eſt le tranchant, & à un conoïde par un arrondiſſement qui participe de la nature du cône: c'eſt pourquoi je l'appelle un *coin-conoïde*.

§. Ce ſolide étant coupé par des plans différemment poſés, montrera dans ſes ſections des courbes auſſi fort différentes en contour & en eſpece.

1°. Si le plan coupant eſt perpendiculaire

au parallélogramme de la base, & parallele à un des côtés, il est évident que la *section* sera un *triangle*, comme CHM & ORN, dont le plus grand est celui qui passe par le centre C, & la ligne du milieu CM, que j'appelle l'axe, & les plus petits seront ceux qui approcheront des côtés AD & BE, où ils se réduiront enfin à une ligne droite, parce que leur hauteur sera déterminée par les ordonnées *or* du demi-cercle, qui diminuent à mesure qu'elles approchent du diametre AB, ensorte qu'elles sont réduites à des points en A & B.

2°. Si le plan coupant le coin-conoïde est parallele à la tête circulaire AHB, la section sera une ellipse.

Pour le démontrer, il nous suffira de tracer une moitié du coin, parce que l'autre lui étant parfaitement égale, on évitera la confusion des lignes dans la figure.

Soit cette moitié AHCMD coupée en *Le*, parallélement au quart de cercle de la tête du coin AHC, qu'on suppose perpendiculaire au plan de la base ACMD, quoiqu'il ne le paroisse pas dans la figure qui est représentée en perspective. Il faut démontrer que la courbe L*yx* est un quart d'ellipse, si la tête ARH est un quart de cercle. *Fig. 26.*

Ayant pris à volonté un point *o* sur le

rayon CA, on tirera de ce point une parallele au rayon CH, qui coupera l'arc de cercle AH au point R, & fur le plan AM de la bafe une parallele ON au côté AD, qui coupera DM au point N, & L*e* au point *p*, duquel fi on éleve une perpendiculaire *py*, elle coupera la ligne RN en *y*, comme *ex* coupera la ligne HM en *x*. Or, à caufe des triangles femblables MCH, M*ex*, on aura MC : CH :: M*e* : *ex*, & à caufe des triangles femblables NOR, N*py*, on aura NO : OR :: N*p* : *py*; mais MC = NO, & M*e* = N*p* : donc CH : *ex* :: OR : *py*; ce qui eft une propriété de l'ellipfe, dont les ordonnées (comme nous l'avons démontré ci-devant) font entr'elles comme celles du cercle : donc la fection du coin-conoïde, par un plan parallele à la tête du coin, eft une *ellipfe* plus ou moins applatie, à mefure que le plan coupant approche de la ligne du tranchant DM, où le petit axe *ex* fe réduit à un point en M. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Si le contour de la tête étoit un arc moindre que le demi ou quart de cercle, la fection elliptique feroit auffi une moindre portion d'ellipfe.

2°. Si la courbe de la tête étoit elliptique,

les sections paralleles seroient encore des ellipses, dont les axes peuvent être différemment posés : par exemple, si le grand axe de la tête étoit perpendiculaire au diametre A C, il arriveroit qu'entre cette tête & le tranchant, il y auroit une section circulaire, lorsque C H deviendroit égal à C A, & ensuite les autres sections auroient leur grand axe, comme dans le cas précédent, dans le plan de la base. *Fig. 25.*

SECTION I.

Si l'on coupe le coin-conoïde par un plan perpendiculaire à celui de la base, mais incliné à l'égard du triangle par l'axe M C H, il en résulte différentes figures de courbes.

1°. Si le plan F *y* G qui coupe ce triangle obliquement, coupe les deux côtés opposés du parallélogramme de la base D A, B E, il se forme une courbe F *y* G inégalement enflée, à mesure qu'elle s'approche de la tête, ou du tranchant du coin-conoïde ; ce qu'il est facile de reconnoître, en supposant que les lignes O N & *on* soient également éloignées de l'axe C M ; d'où il résulte que les ordonnées au cercle de la tête R O & *ro* sont aussi égales : par conséquent les sections triangulaires R O N, *ron* sont égales : donc N O : O R :: N *p* : *px*, & *Fig. 27.*

no:*or*::*nq*:*qz* ; mais NO=*no*, OR=*or*: donc N*p*:*px*::*nq*:*qz* ; mais N*p* eſt plus grand que *nq*, par la ſuppoſition de l'obliquité de la ſection par FG : donc *px* eſt plus grand que *qz*. C. Q. F. D : donc cette courbe n'eſt plus une ellipſe, puiſque les ordonnées, à même diſtance du centre, ou milieu *m*, ſont inégales.

2°. Si le plan coupant eſt ſi oblique, qu'il ne coupe pas les deux côtés paralleles AD, BE, mais ſeulement un, par exemple AD
Fig. 27. en K, & le tranchant DE en I, il eſt viſible que la ſection deviendra très-aiguë en I, & que ſuppoſant *px*, ordonnée commune à cette ſection & à la précédente, la partie de la ſection *x*I deviendra preſque en ligne droite, parce que l'ordonnée *tu* ſera plus petite que *my*, étant plus près du tranchant.

3°. Si le plan coupant ne paſſe par aucun des côtés, mais ſeulement par le tranchant
Fig. 27. DE & le diametre AB, comme *o*N*r*, la ſection ne ſera plus compriſe par deux lignes, une droite & une courbe, mais ſera un triangle mixte, dont les deux côtés N*o* & *or* ſont rectilignes, & N*r* courbe, qui ſe redreſſera d'autant plus, que la ſection approchera du paralléliſme de l'axe, auquel cas la ſection redevient un triangle rectiligne.

SECTION II.

Si au lieu d'un plan perpendiculaire à celui de la baſe, toujours ſuppoſé, comme dans les ſections précédentes, *le coin-conoïde eſt coupé par un plan qui lui ſoit parallele*, il ſe formera une courbe, qui n'eſt ni circulaire ni elliptique, ni ſemblable à celle du cas précédent, dont on pourra trouver autant de points que l'on voudra par le calcul, ou avec la regle & le compas, en ſuppoſant autant de ſections triangulaires paralleles au triangle par l'axe, que l'on voudra avoir de points de la courbe demandée.

Soit le plan FGX celui qui coupe le coin-conoïde parallélement à ſa baſe AD MC, dont la diſtance à cette baſe eſt la hauteur GC, ſi l'on veut avoir, par exemple, quatre points de cette courbe. Il eſt déja évident qu'en tirant par le point G donné une parallele au diametre AC, elle coupera l'arc de tête AH au point F, qui eſt déja un de ces points. Secondement, ſi dans le triangle par l'axe CHM on tire auſſi une parallele à l'axe CM, elle coupera la ligne HM au point X, qui ſera un ſecond point de la courbe. *Fig. 28.*

Par le même moyen, ſi l'on tire à volonté des paralleles à l'axe, comme ON, *on*, & qu'on éleve ſur le plan de la baſe

des perpendiculaires OR, *or*, qui couperont l'arc AH aux points R & *r*, & qu'enfin on tire les lignes RN, *rn*, on aura des triangles, que la ligne GF coupera en *i* & *k*, par lesquels, si l'on mene les lignes *iy*, *kz* paralleles aux lignes ON, *on*, elles couperont les lignes RN, *rn* aux points *y* & *z*, qui seront des points de la courbe demandée F*yz*X. C. Q. F. F.

De cette pratique, avec la regle & le compas, on déduit facilement la maniere de trouver les mêmes points par le calcul; car toutes les sections triangulaires étant coupées par des lignes paralleles au plan de
Fig. 28. la base FGX, il s'y forme des triangles semblables, qui donneront les analogies suivantes.

1°. HC : CM :: HG : GX qui donne le point X de la courbe. 2°. OR : ON :: RK : KZ.

3°. *ro* : *on* :: *r*I : I*y*. On a donc quatre points, F, *y*, *z*, X au contour de cette courbe, & on en peut trouver de la même maniere autant que l'on voudra, & y faire passer une ligne courbe à vue, ou avec une regle pliante.

Nous n'avons représenté dans cette figure qu'une moitié du coin, parce qu'il est visible que l'autre moitié lui doit être parfaitement égale, soit que le parallélogramme

par l'axe de la base soit rectangle ou obliquangle.

COROLLAIRE.

De la division du coin-conoïde en plusieurs sections triangulaires, on peut tirer la maniere de trouver toutes les différentes sections planes qu'on y peut faire, soit par un plan parallele à celui de la base, comme dans le dernier exemple, soit qu'il lui soit perpendiculaire, comme dans le précédent, on trouvera toujours les longueurs des ordonnées à la courbe de la section, lesquelles seront les intersections des plans de la base, & des plans coupans en différentes situations avec les triangulaires.

Il y auroit beaucoup de choses à dire sur la figure des sections comparées aux opposées qui se feroient en prolongation & rebroussement, si le coin-conoïde étoit double; ensorte que la tête, que nous n'avons supposé qu'un demi-cercle, fût un cercle entier; ou si l'on prolongeoit les côtés du parallélogramme par l'axe, & des sections triangulaires, comme l'on fait, lorsqu'on représente deux cônes opposés au sommet; ou enfin si la tête du conoïde, qu'on a supposé circulaire, étoit elliptique.

Les deux premiers cas n'étant que des curiosités inutiles à notre objet de la coupe

des pierres, ne méritent pas que nous nous y arrêtions. Quant au dernier, il ne change en rien la maniere de trouver les sections des points des courbes paralleles à la tête, ou obliques à l'axe du coin-conoïde : comme nous l'avons dit ci-devant ; il arrive une section circulaire entre les elliptiques, dont le grand diametre est perpendiculaire au plan de la base, & celles où ce même diametre lui est parallele

USAGE.

Il n'est point de surface de corps réguliérement irrégulier plus commune dans les édifices que celle du coin-conoïde, parce que presque toutes les petites voûtes, appellées *arriere-voussures réglées & bombées*, qui soutiennent la masse d'un mur, au dessus du vuide d'une porte ou d'une fenêtre, en sont une imitation, en ce que le linteau ou fermeture de chacune de ces baies étant en ligne droite horizontale d'une pierre, ou de plusieurs en plate-bande sur le *tableau* ; on bombe un peu le derriere de l'*ébrasement*, pour en faire une petite voûte, qui a plus de force qu'une plate-bande, pour être chargée d'un massif, & de cet arc intérieur on tire des lignes droites à la plate-bande, qui forment une surface concave semblable à la convexe d'un

d'un coin-conoïde, à moins que, ſans égard à la durée du bâtiment on veuille (comme en quelques Provinces) y ſubſtituer un linteau de bois, qui a, non ſeulement l'inconvénient de la pourriture qui le détruit, mais encore celui de s'affaiſſer par la charge qui le fait bomber en *contre-bas*, & fracturer le mur au deſſus.

Obſervation ſur les changemens ordinaires à cette arriere vouſſure.

Nous avons toujours ſuppoſé que la ſection par l'axe & le tranchant du coin étoit un parallélogramme : il arrive plus ordinairement qu'elle eſt un trapeze, lorſque l'intérieur de la porte ou fenêtre eſt ébraſée, enſorte que les pieds droits ne ſont pas paralleles, mais concourent en quelque point fort éloigné, plus ou moins, ſuivant le plus ou moins d'obliquité des pieds droits à l'égard de l'axe ou direction du milieu de la baie.

Cette différence ne cauſe aucun changement à celui des ſections triangulaires de la tête au tranchant, ſi ce n'eſt que les plans de ces triangles ne ſont pas paralleles entr'eux; mais la différence de leur diſtance à la tête du coin & à ſon tranchant, eſt facilement donnée, en diviſant le diametre

de l'arc de la tête, & la ligne du tranchant en un même nombre de parties égales, sans chercher hors de l'objet le point où ils doivent tous concourir : ainsi les observations faites sur la nature des différentes sections subsistent, à cette petite différence près.



SECONDE PARTIE.

Des sections faites à la surface des corps ronds par la pénétration d'autres corps de même ou de différentes especes.

LEs sections planes, dont nous venons de parler, n'ayant jamais qu'une courbure, sont toujours applicables à une surface plane, puisqu'elles en sont engendrées; mais les intersections de deux surfaces courbes qui se pénetrent mutuellement, ne sont pas toujours aussi simples: elles sont aussi quelquefois planes, & le plus souvent courbes d'une courbure composée de deux directions, l'une suivant un plan, l'autre suivant un autre qui le croise; de sorte qu'on ne peut décrire, ni appliquer de telles courbes sur une surface plane; & par cette raison, on les appelle *courbes à double courbure*, dont nous allons donner une idée conforme à celle des corps solides, par leurs trois dimensions, longueur, largeur & profondeur.

DEFINITION I.

Soit un cercle ADBE, représenté ici *Fig. 19.*

en perſpective, du centre duquel C tombe une perpendiculaire CP d'une longueur donnée pour la plus grande diſtance du cercle à une courbe quelconque APB; ſi l'on tire des ordonnées au diametre AB de ce cercle, comme DE, FG, HI, qu'on abaiſſe de leurs extrêmités & milieux des paralleles à la ligne CP, *mo*, *nq*, & qu'enfin on tire par les points O, P, Q des lignes paralleles & égales aux ordonnées du cercle, comme *gf*, *ed*, *ih*.

La ligne courbe qui ſera menée par toutes ces extrêmités A*gei*B*hdf*A, ſera appellée un *cicloimbre*, c'eſt-à-dire une eſpece de cercle plié en *tuile creuſe*, qu'on appelle en latin *imbrex* par abréviation de *circulus imbricatus*.

La ligne courbe APB qui la traverſe par le milieu, s'appellera *l'axe courbe*, la ligne droite AB ſon *axe droit* ou *ſoutendant*, la ligne CP ſon *axe de profondeur*, les lignes droites qui ſeront tirées d'un point de la circonférence à ſon oppoſé, comme *gh*, *fi*, paſſant par l'axe de profondeur CP, s'appelleront des *diametres*.

Où l'on peut compter trois dimenſions, comme dans les ſolides, longueur AB, largeur *de*, hauteur CP.

DÉFINITION II.

Si au lieu du cercle ſoutendant ADBE on avoit ſuppoſé une ellipſe, la courbe de la circonférence auroit été appellée une *ellipſimbre.* Fig. 30.

Par la même raiſon, ſi on avoit ſuppoſé une parabole ou une hyperbole, on auroit pu appeller la courbe *parabolimbre*, *hyperbolimbre*. Je ſçais que ces noms ne ſont point uſités, mais il eſt permis d'inventer des noms à des choſes qui n'en ont point eu juſqu'à nous, pour éviter les périphraſes qu'on ſeroit obligé d'employer pour ſe faire entendre.

COROLLAIRE.

Il ſuit de ces définitions & de la génération du cicloimbre, que toutes les ordonnées à l'*axe courbe* ſont égales à leurs correſpondantes dans le cercle ſoutendant: car ſi l'on y fait attention, les ſections GF*fg*, ED*de*, IH*hi* ſont des parallélogrammes, par la ſuppoſition que les côtés G*g*, E*e*, I*i* ſont paralleles à l'axe de profondeur CP, & les lignes GF, *gf*, &c. paralleles entr'elles. Fig. 29

2°. Que tous les diametres droits de la courbe, paſſans par l'axe de profondeur, ſont encore tous égaux à ceux du cercle

ſoutendant, auxquels ils ſont paralleles; la ſeule différence conſiſte en ce que dans le cercle ils ſont tous dans le même plan, & que ceux de notre courbe ſont tous à des diſtances différentes le long de la hauteur de l'axe de profondeur, par conſéquent hors de la ſurface courbe du cicloimbre, dans laquelle il n'y en a qu'un *ed*, que j'appelle l'*axe droit*, parce qu'il eſt perpendiculaire au plan de la ſection mixte ABPA par l'axe de profondeur, & par le diametre ſoutendant AB.

Si l'on ſuppoſe des plans paſſans par l'axe de profondeur, & inclinés au diametre AB, comme à la fig. 30, ils feront dans la ſurface courbe du cicloimbre des diametres courbes *g*P*h*, qui le ſeront d'autant moins, que le plan paſſant par l'axe de profondeur, approchera plus de la perpendiculaire au diametre AB.

3°. Que toutes ces propriétés ſont à peu près les mêmes, ſi au lieu d'un cercle ſoutendant, on ſuppoſe une ellipſe, avec cette ſeule différence, que les diametres droits par l'axe feront inégaux entr'eux, comme ils le ſont dans l'ellipſe ſoutendante de l'ellipſimbre.

COROLLAIRE.

Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que l'axe

de profondeur étoit perpendiculaire au plan du cercle ou de l'ellipſe ſoutendante. Si on le ſuppoſe oblique, la courbe ſera toujours de la même nature, la ſeule différence qu'il y aura, conſiſtera dans la différence du contour de l'axe courbe A P B, qui le ſera plus ou moins de B en P, que de A en P, & inégalement partagé en P, ce qui entraîne une pareille inégalité dans les diſtances des ordonnées entr'elles, & celles qui leur correſpondent dans le cercle ſoutendant, & qu'il n'eſt pas difficile de concevoir, par la ſeule inſpection de la figure, puiſque l'axe droit *ed* n'eſt pas au milieu de l'axe courbe A P B.

Pour ſe former une idée juſte & ſenſible de la ſurface courbe du cicloimbre & de l'ellipſimbre, il n'y a qu'à ſe repréſenter une *tranche* de Livre un peu épaiſſe, dreſſée & coupée quarrément, c'eſt-à-dire perpendiculairement aux feuilles, comme on le fait ſur la preſſe. Si l'on trace un cercle ſur la ſurface plane, qu'y a fait le couteau, traverſant cinq ou ſix cens feuilles, ou une ellipſe, & qu'après avoir retiré le Livre de dedans la preſſe, on renfonce le milieu de la tranche, comme on a coutume de faire, pour arrondir un peu le dos plus ou moins, comme l'on voudra, il en réſultera une ſurface concave à la tranche,

qui changera la trace du cercle plan, en un contour de courbe à double courbure, que nous appellons *cicloimbre* ou *ellipſimbre*, relativement au cercle ou à l'ellipſe qui y avoit été tracée, pendant que la tranche étoit plane ſur la preſſe.

On apperçoit ſenſiblement, par cet exemple, qu'il n'eſt arrivé aucun changement de longueur aux feuilles, qu'on peut conſidérer comme des ordonnées à l'axe courbe, qui l'étoient auparavant à l'axe ou diametre du cercle ou de l'ellipſe plane, que celui d'une différente poſition les unes à l'égard des autres, plus reculées en approchant du milieu de la ſurface concave, ſuivant une progreſſion qui dépend de la courbure de la ſurface du dos, qu'on rend plus ou moins convexe comme l'on veut.

Il eſt encore évident que quoique la nouvelle ſurface concave ait un plus grand contour, ſuivant ſon axe courbe A P B, le nombre des ordonnées, qui ſont les épaiſſeurs des feuilles, n'ayant pas augmenté l'axe A B, ſoutendant, qui comprend toutes ces épaiſſeurs, ne s'eſt ni ralongé ni raccourci, mais bien la courbe A P B.

On verra dans la ſuite l'utilité de cette obſervation pour la pratique des traits de la coupe des pierres, par la rencontre des berceaux, & autres voûtes qui ſe croiſent.

THÉORÊME I.

La courbe qui résulte de la rencontre des ſurfaces de deux ſpheres égales ou inégales entr'elles, qui ſe pénétrent mutuellement, eſt la circonférence d'un cercle.

On peut conſidérer ici différens cas de profondeur de pénétration.

Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par les deux centres C & *c* des ſpheres de différentes grandeurs, il les coupera en deux cercles majeurs, AFG & FEG, qui ſe croiſent aux points communs F & G de leur circonférence, leſquels ſont auſſi à la ſurface des deux ſpheres, puiſqu'ils ſont à leur interſection, & aux extrêmités du diametre d'un cercle mineur, qui eſt la corde commune aux deux cercles majeurs. Cette corde peut paſſer, ſuivant l'inégalité des ſpheres ou la profondeur de la pénétration, 1°. entre les deux centres, comme à la *fig.* 31, 2°. ou par un des centres, comme à la 32ᵉ, 3°. ou au dehors des deux centres, comme à la 33ᵉ: de quelque façon que ce ſoit, la démonſtration ſera la même. *Fig.* 31. *Fig.* 32. *Fig.* 33.

Ayant tiré par les centres C & *c* une ligne droite qui coupera la ligne FG en *x* au 1ᵉʳ & 3ᵉ cas, & en *c* au ſecond, on tirera des centres C & *c* des lignes *c*F, *c*G, CF, CG

aux points F & G d'interſection, qui ſeront des rayons de chacune des ſpheres, par conſéquent égaux entr'eux, & la corde FG commune aux deux cercles de la grande & de la petite ſphere, eſt coupée en deux également, & perpendiculairement par la ligne Cc qui paſſe par leurs centres (*Eucl.* Liv. 3, Prop. 3). Si des mêmes centres C, c, & du point x, on tire des lignes droites CI, cI, xI à un point I de la ſection commune des deux ſpheres, deſſinée en perſpective, on aura CFc, CGc, CIc, égaux en tout, de même que les triangles CxF, CxG, CxI rectangles en x, qui ont le côté commun Cx, & les hypoténuſes égales, en ce qu'elles ſont les rayons de la ſphere : donc (par la 4[e] pr. du 11[e] Liv. d'*Eucl.*) les trois lignes Fx, Ix, Gx ſont dans un même plan, & les rayons d'un cercle FIG commun aux deux ſpheres : donc les points F, I, G ſont à la circonférence de leur interſection. C. Q. F. D.

La même démonſtration eſt plus ſimple dans la ſeconde figure, où les points x & c ſont confondus.

Application à l'uſage.

On connoît, par cette propoſition, que l'arête d'enfourchement d'une voûte ſphé-

rique, qui en rencontre une autre plus grande ou plus petite, eſt un cercle : telle eſt celle d'une niche en coquille, dont l'impoſte eſt de niveau à la naiſſance d'un dôme ſphérique, telle eſt encore l'impoſte d'une calotte renfoncée dans un dôme de même nature ou de différente, ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, pourvu que leur axe ſoit commun.

SECTION.

De la pénétration des ſpherès par des cylindres.

Un cylindre qui pénetre une ſphere peut être conſidéré en deux différentes poſitions qui changent la courbe d'interſection des ſurfaces de ces deux corps, ſçavoir, 1°. lorſque l'axe d'un cylindre droit ſur ſa baſe paſſe par le centre de la ſphere.

2°. Lorſqu'il n'y paſſe pas, ou que le cylindre eſt *ſcalene*.

THÉORÊME II.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cylindre droit, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphere, eſt un cercle.

La démonſtration en eſt très-ſemblable à celle du théorême précédent.

Fig. 34. Soit une demi-ſphere ADEB, & un cylindre HIED, dont l'axe XF prolongé paſſe par le centre C de la ſphere; ſoit auſſi la courbe DGE la repréſentation en perſpective de celle de l'interſection des ſurfaces de ces deux corps différens, dans laquelle on a pris un point G à volonté, duquel on tirera d'un côté une ligne GC au centre de la ſphere, & une autre GF à l'interſection de l'axe XC, avec le diametre DE du cylindre.

Il a été démontré dans la propoſition précédente, que les lignes DF, GF, EF ſont dans un même plan & rayon d'un même cercle, les trois triangles DFC, GFC, EFC étant rectangles en F. Si l'on tire auſſi d'un point X de l'axe XF des lignes XD, XG, XE à la circonférence de la baſe du cylindre, ſuppoſé droit, on reconnoîtra par la même raiſon, que la ligne courbe DGE, qui eſt une ſection plane de la ſphere, eſt auſſi en même tems la baſe du cylindre: par conſéquent ce cercle eſt commun aux deux corps, & la circonférence eſt l'interſection de leurs ſurfaces. C. Q. F. D.

Application à l'uſage.

On voit par cette propoſition, que la baſe de la tour d'une lanterne, élevée au

milieu d'un dôme, comme on en voit dans presque toutes les Eglises d'Italie, est un cercle, parce que le milieu de cette tour tombe à plomb sur le centre du dôme.

Par la même raison, la rencontre d'une nef qui aboutit à un dôme, dont les impostes sont de niveau, & le milieu de la nef, dirigé à celui du dôme, est aussi un cercle, comme le montre la même figure, si l'on suppose XC en situation horizontale, au lieu de la verticale, sans rien changer à la figure; car alors la nef seroit représentée par la moitié de cylindre GEIHD: mais il n'en sera pas de même si l'un ou l'autre de ces corps est surhaussé ou surbaissé dans son ceintre, comme nous allons le démontrer.

THÉORÊME III.

La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cylindre scalene, dont l'axe passe par le centre de la sphere, est une ellipsimbre.

Soit une demi-sphere ADEB, pénétrée par un cylindre scalene FGNM, dont l'axe XC passe par le centre C de la sphere. *Fig. 35.*

Si l'on suppose un plan passant par cet axe, il fera deux sections différentes, sçavoir, un parallélogramme obliquangle FGNM dans le cylindre, & un demi-

cercle majeur A D E B dans la ſphere, leſquelles ſe coupent aux points D & E, qui ſont par conſéquent communs aux deux ſurfaces de ces corps, & les ſeuls de cette ſection ; car ſi l'on en prend d'autres au deſſus ou au deſſous des points D & E, ils ſeront au dehors ou au dedans de la ſphere, ſi c'eſt ſur le cylindre ; au dehors ou au dedans du cylindre, ſi c'eſt ſur le contour du demi-cercle de la ſphere ; ce qui eſt viſible.

Si l'on ſuppoſe un ſecond plan, qui coupe perpendiculairement le parallélogramme
Fig. 35. G M par l'axe X C en D E, il fera deux ſections encore différentes, ſçavoir, un cercle dans la ſphere, qui a pour diametre D E, interſection des deux plans, & une ellipſe dans le cylindre, dont la même D E eſt le petit axe, parce que la ſection perpendiculaire à l'axe d'un cylindre ſcalene eſt toujours une ellipſe, comme nous l'avons dit ci-devant : car la *ſous-contraire*, qui eſt un cercle, eſt encore inclinée à l'axe autant que la baſe dans le ſens oppoſé.

D'où il ſuit que puiſque les deux ſections planes dans la ſphere & dans le cylindre ſont des différentes circonférences, aucune des deux ne peut être commune aux deux ſurfaces. L'ellipſe du cylindre ſera circonſcrite au cercle de la ſphere, parce que ce

diametre D E est plus petit que F G de la base du cylindre, lequel est égal à O P, autre diametre de la même base, circulaire par la supposition, lequel est représenté en raccourci de perspective, égal à son parallele q Q : donc q Q est plus grand que D E : donc les points q & Q sont hors de la sphere.

Donc la ligne d'interfection des deux surfaces courbes ne sera pas dans le plan DqEQ, avec lequel elle n'aura de commun que les deux points opposés D & E : ce sera donc une ligne courbe à double courbure, sçavoir, en circonférence autour de l'axe, & en inégalité de hauteur, au dessus ou au dessous de la section plane par D E ; dans notre figure, elle passe au dessous en D x E, ou, pour parler plus généralement, plus près du cercle majeur, parallele à D E, qui est A R B S, représenté en perspective par une ellipse ; parce que le point Q étant hors de la sphere dans la section plane par D E, le côté parallele à l'axe du cylindre descendra au dessous, jusqu'à ce que la corde de l'arc d'une section par l'axe ou parallele soit égale au diametre O P du cylindre, comme on le voit par le profil de la fig. 36, où le diametre S T de la section plane de la sphere est plus petit que q Q du parallélogramme par l'axe du cylindre O P Q q.

Il faut montrer présentement le rapport que cette courbe solide, ou à *double courbure*, aura avec l'ellipse de la section plane, faite par le diametre DE, perpendiculairement à l'axe XC; & pour y parvenir d'une maniere sensible, il faut une seconde préparation de figure, parce que la premiere n'a servi qu'à trouver deux points communs de la courbe cherchée avec la plane, sçavoir D & E, qui sont ceux de leur at-
Fig. 36. touchement. Outre les deux plans imaginés passer l'un par l'axe XC, l'autre par le diametre DE, perpendiculairement entr'eux, il faut encore en supposer deux autres OQ, *oq* perpendiculaires au premier qui passe par l'axe en DFXC pour découvrir par de nouvelles intersections de la sphere & du cylindre, d'autres points de la circonférence commune à la rencontre des deux surfaces de ces corps, lesquels deux plans en fourniront quatre, sçavoir, deux d'un côté & deux de l'autre, du plan passant par DFXC, marqués x & y, & ensuite tant qu'on en voudra chercher par le même moyen.

Cette multiplicité de plans imaginés & représentés en perspective dans la même figure, y causent nécessairement un peu de confusion embarrassante, parce qu'il faut relever par la pensée, ce que les yeux ne sont

font appercevoir qu'à plat en raccourci ; ce qui nous oblige de ne repréſenter ces ſections que dans un quart de la ſphere ASKI, & une moitié du cylindre OFPNL*f*.

Ayant ſuppoſé, comme nous l'avons fait en premier lieu, un plan paſſant par l'axe de la ſphere XC, & le point D d'interſection commune, on en ſuppoſera deux autres qui lui ſeront perpendiculaires & paralleles à l'axe ; ils feront chacun deux ſections différentes, ſçavoir, un parallélogramme *o* V*ur*, & OPNL dans le cylindre, & deux cercles, ou ſeulement demi-cercles *pst* & ISK dans la ſphere, qui ſe croiſent, l'un au point *x*, l'autre au point *y*, où ſont les points communs à ces deux figures de parallélogrammes & de cercles : donc on a trois points trouvés à la circonférence de la courbe d'interſection des deux ſurfaces cylindriques & ſphériques pour ſa moitié ; ſuppoſant l'autre égale, comme elle le doit être, hors de la figure.

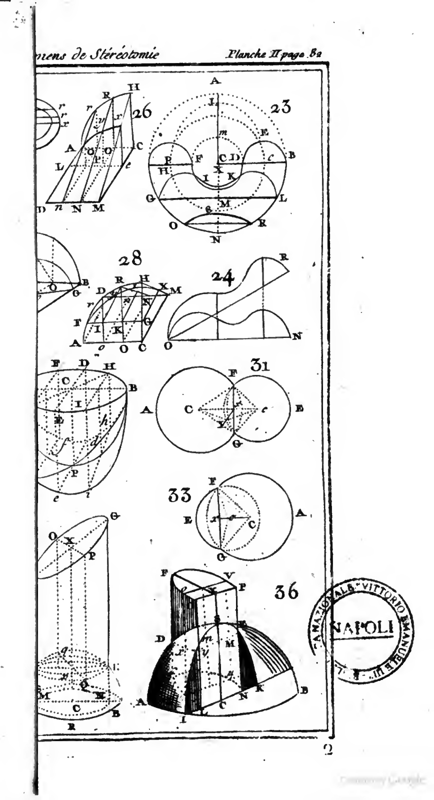
§. Préſentement ſi par les points *x* & *y* on tire des perpendiculaires *xm*, *y*M au plan paſſant par l'axe & le point D, ce ſeront des ordonnées à l'axe courbe D*m*M, qui ſeront viſiblement égales à celles de la baſe ou ſection du cylindre FPO, qui doit être une ellipſe, ſuivant nôtre ſuppoſition que le cylindre eſt ſcalene, parce que ces

ordonnées ſont paralleles entr'elles, & terminées par les côtés du cylindre or, OL, qui ſont auſſi paralleles entr'eux. Or cette ellipſe étant parallele à celle qui paſſe par le point D dans la ſphere, lui eſt égale: donc toutes les ordonnées à l'axe courbe, dont la moitié eſt ici DmM, ſont égales à celles de la ſection plane par DE de la précédente figure : donc la ſection courbe, dont un côté de la demi-circonférence eſt Dxy eſt une *ellipſimbre*, ſuivant notre définition, dont la moitié de l'axe ſoutendant eſt DM, celle de l'axe droit ym, & celle de l'axe courbe DmM. C. Q. F. D.

Nous donnerons au ſecond Livre la maniere de trouver autant de points de cette courbe que l'on voudra.

USAGE.

Cette propoſition fait voir que ſi une nef d'Egliſe voûtée en berceau ſurbaiſſé ou ſurmonté, rencontre un dôme ſphérique, dont l'impoſte ou naiſſance eſt de niveau avec celle du berceau, l'arête de rencontre des doëles de ces voûtes ne ſera pas une courbe plane qu'on puiſſe bornoyer d'un côté à l'autre, mais à double courbure; d'où il réſultera que l'arc doubleau qu'on voudroit faire en direction droite d'un côté de la naiſſance de l'enfourche-


26
23
28
24
31
33
36

ment à l'autre, comme l'on en feroit entre deux pilaſtres oppoſés, ne pourroit ſuivre le contour de l'arête de rencontre des deux doëles, mais ſeroit tout entier dans celle de la nef, laiſſant encore au-delà de l'arc doubleau une ſaillie, en façon de lunette courbe, avançant vers la clef, ſuivant le rapport des diametres de la ſphere & du cylindre entr'eux; ce qui ſeroit déſagréable à la vue.

THÉORÊME IV.

De la ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cylindre droit ou ſcalene qui ſe pénetrent, de maniere que l'axe du cylindre ne paſſe pas le centre de la ſphere & une ellipſimbre complete, lorſqu'il la pénetre de toute ſa circonférence.

Et d'une ellipſimbre compoſée de deux parties incompletes, ſi le cylindre n'entre qu'en partie de ſa circonférence dans la ſphere.

§. Soit une demi-ſphere A L B pénétrée par un cylindre D F G H : donc l'axe X N ne paſſe pas par le centre C de la ſphere. *Fig. 37.*

Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par cet axe, & par le centre C de la ſphere, il fera deux ſections différentes dans ces deux corps, ſçavoir un parallélogramme DFGH dans le cylindre, & un cercle A L B dans

la ſphere, qui ſe croiſeront en E & L, ou ſeront par conſéquent des points communs à l'une & l'autre de ces deux ſurfaces.

Si l'on tire par ces points une ligne EL, elle ſera le diametre commun du cercle que formera dans la ſphere un plan perpendiculaire à celui du parallélogramme par l'axe du cylindre, & le grand axe de l'ellipſe qu'il formeroit à la ſurface du cylindre par une ſection oblique, inſcrite dans la circulaire : par conſéquent aucune des deux ſections ne peut être commune aux deux ſurfaces ; d'où il ſuit que la courbe de leur rencontre ou interſection eſt à double courbure, touchant ſeulement la plane aux deux points communs E, L, & point d'autres.

Il ſera facile de reconnoître que cette courbe eſt une ellipſimbre, par la démonſtration de la propoſition précédente : car ſuppoſant de même un plan paſſant par l'axe XN du cylindre, perpendiculairement au premier DFGH, & d'autres plans paralleles en auſſi grand nombre qu'on voudra, qui couperont le grand axe EL de l'ellipſe plane, faite par la ſection oblique du cylindre, ils formeront des parallélogrammes dans ce cylindre, qui termineront par leurs côtés paralleles les ordonnées de l'ellipſe plane, comme IK, &

celles de la courbe à double courbure, comme yY.

Il faut ſeulement remarquer que dans le cas préſent, l'axe de profondeur de la courbe à double courbure, qui eſt mT, n'eſt pas perpendiculaire à celui de l'ellipſe EL; d'où il réſulte que l'axe courbe ETL n'eſt pas diviſé exactement par l'axe droit tranſverſal yY, & par conſéquent que les ordonnées à cet axe courbe, qui ſont eſſentiellement égales en nombre à celles qui ſont de part & d'autre de cet axe droit tranſverſal yY, n'y ſont pas également ſerrées, puiſque la partie ET eſt plus petite que TL; ce qui ſemble du premier abord un paradoxe, mais qui devient cependant ſenſible dans l'exemple que nous avons donné du cylindre formé par le dos d'un Livre, étant évident qu'il n'y a pas plus de feuillets dans une moitié que dans l'autre, ſoit qu'il ſoit coupé perpendiculairement au côté, ou obliquement, & que la ligne de la ſection oblique ſoit plus longue que la perpendiculaire au côté.

Application à l'uſage.

Cette propoſition ſert à faire connoître quelle eſt la courbe de l'arête d'enfourchement, c'eſt-à-dire de la rencontre des ſur-

faces d'une voûte ſphérique, & de ces lunettes cylindriques qui donnent paſſage à la lumiere des fenêtres ou vîtraux qui les éclairent, lorſque la naiſſance de leur ceintre n'eſt pas de niveau avec celle de la voûte ſphérique, parce qu'alors l'axe du cylindre ne paſſe pas par le centre de la ſphere. Ce cas ne donne l'exemple que d'un demi-cylindre, lorſque les pieds droits de vîtraux ſont à plomb; mais il y en a d'autres, en architecture, qu'on appelle des *yeux de bœuf*, où le cylindre eſt entier, comme on en voit aux quatre dômes de l'Egliſe de S. Pierre de Rome, qui cantonnent, c'eſt-à-dire accompagnent le grand de quatre côtés, où les vîtraux inclinés en abat-jour ſont à la baſe d'un cylindre entier, dont l'axe ne paſſe point par le centre du dôme.

La ſeconde partie de cette propoſition qui concerne le cas *où le cylindre n'entre dans la ſphere que d'une partie de ſa circonférence*, ſe déduit facilement de la premiere, en ce qu'elle fait deux ſections d'ellipſimbres inclinées entr'elles, leſquelles conſidérées comme une ſeule, ont été appellées une ellipſimbre compoſée.

Fig. 38. fig 45 Soit ABD une demi-ſphere qu'un cylindre EGF traverſe ſeulement d'une partie de ſa circonférence, par exemple YKL,

le reste YGL passant hors de la sphere.

Si du centre C de cette sphere on tire une perpendiculaire CG à l'axe du cylindre X*x*, & que du point Y ou L, où la circonférence du cylindre rencontre celle de la sphere, on abaisse sur GC une perpendiculaire YP : cette ligne sera une ordonnée commune au demi-diametre AC d'un cercle majeur de la sphere, & de celui du cylindre coupé, perpendiculairement à son axe X*x*, qu'on a représenté ici dans le même plan, quoique, suivant les regles de la projection, il ne devroit être représenté que par la ligne GK, & l'arc AYB par le rayon AC ; ce qui ne fait aucun changement à la réalité, & qui sert à montrer que le point P représente les deux points Y & L communs aux deux surfaces, qui sont par conséquent à la circonférence de la courbe composée, & au pli de l'angle rentrant, ou de l'angle saillant, que les deux parties de cette courbe font entr'elles.

Pour connoître si elles se rencontrent en angle rentrant ou saillant, il faut examiner quelle est la profondeur de la pénétration du cylindre dans la sphere : si l'axe X*x* passe au dedans du point A dans la sphere, l'angle curviligne sera saillant, comme la clef d'une voûte en tiers point YSL ; si au contraire l'axe est au dehors, l'angle de ren- *Fig. 39.*

contre ſera rentrant, comme le curviligne Y T L.

La préparation à la démonſtration conſiſte à chercher les axes ſoutendans de ces portions d'ellipſimbre, qui ſe croiſent en Y & L. Or ces deux points étant repréſentés, comme nous l'avons dit par le ſeul point P, qui eſt la projection ſur le parallélogramme E F I H par l'axe du cylindre, nous avons deux points de chacune des courbes à double courbure d'interſection des ſurfaces, ſçavoir, pour l'une H & P en projection; & pour l'autre I & le même P. Ainſi ſi l'on tire par ce point les lignes H Q, I Q, elles ſeront les grands axes des ſections elliptiques que feroit dans le cylindre un plan perpendiculaire au parallélogramme par l'axe, & paſſant par les points communs donnés H, P, & I, P, c'eſt-à-dire l'un par H Y Q, l'autre par I L Q, leſquels deux plans s'entrecouperont ſuivant la ligne droite Y L, qui eſt une double ordonnée commune au deux cercles du cylindre, & de la ſphere.

Ces connoiſſances préſuppoſées, il eſt aiſé de reconnoître que la courbe à double courbure de chacune des ſections incompletes eſt une ellipſimbre : par conſéquent que la voûte eſt une ellipſimbre compoſée de deux parties égales entr'elles.

Application à l'ufage.

Le cas arrive rarement dans l'architecture, que l'on y rencontre des ellipfimbres compofées de deux parties, mais feulement d'une : telle eft la rencontre de la furface convexe d'une tour ronde qui entre dans une voûte fphérique, ou d'une tour ronde, dans laquelle font des enfoncemens en niche, terminés par le haut en quart de fphere, comme font les trois du Val-de-Grace, au deffus du baldaquin ; ou encore d'une voûte fphérique, établie fur quatre pofitions *d'arcs de cloître*, qui rachete un berceau ; mais quoiqu'il foit poffible d'avoir à faire une ellipfimbre compofée de deux parties, qui font un angle curviligne rentrant, il eft vifible qu'on ne pourroit en faire une en angle faillant, qui poufferoit au vuide à la clef de part & d'autre.

De la rencontre des furfaces des fpheres avec les cônes qui les pénetrent.

Comme l'objet de cet Ouvrage n'eft que de fournir un abrégé des principes à ceux qui veulent étudier l'art de la coupe des pierres, nous ne devons pas nous arrêter fur des cas de voûtes, qui arrivent très-rarement dans la pratique, comme ceux des

rencontres des voûtes coniques avec les ſphériques, les cylindriques & d'autres coniques plus ou moins grandes : les curieux d'une plus ample inſtruction trouveront à ſe ſatisfaire dans le chap. 6 de notre Stéréotomie.

Nous nous bornerons à faire remarquer que les courbes qui ſe forment aux arêtes de rencontre des différentes ſurfaces des corps qui ſe pénetrent dans ce genre de figures coniques, ne ſont plus des courbes à double courbure, dérivées du cercle ni de l'ellipſe, qui ont des ordonnées à l'axe courbe, égales à celles des figures planes, mais dont les ordonnées à l'axe courbe, augmentent ou diminuent dans un rapport connu, en plus grand ou plus petit, ſelon la différence de leur éloignement de la ſection plane, circulaire ou elliptique, ou encore en quelques cas paraboliques ou hyperboliques ; ce qui doit les faire appeller ellipſoïdimbre, paraboloïdimbre, &c. pour ſignifier qu'elles ont quelque reſſemblance avec les ellipſimbres, &c : c'eſt ainſi qu'on appelle ſphéroïde ou conoïde, un corps qui n'eſt exactement ni ſphérique, ni conique, mais qui y reſſemble beaucoup. Cette terminaiſon vient d'un mot Grec, qui ſignifie ſemblable.

Les ſections du cône & de la ſphere qui

ſe pénetrent, peuvent être quelquefois planes, comme lorſque l'axe d'un cône *droit* paſſe par le centre C de la ſphere DEGF : alors il ſe fait à l'interſection de leurs ſurfaces deux cercles inégaux, ſçavoir, un petit vers le ſommet du cône, & un plus grand vers la baſe ; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, parce que la ſection perpendiculaire à l'axe du cône eſt toujours un *cercle*. Or celle-ci eſt toujours perpendiculaire, parce que la corde DE ou FG eſt toujours coupée par le milieu par l'axe X*s*, & cette même corde eſt le diametre d'un cercle, formé par la ſection d'un plan perpendiculaire au triangle par l'axe ASB : donc ce cercle eſt commun à la ſphere & au cône paſſant par les points communs à ces deux corps en D & E, ou F & G : mais comme les côtés du cône s'écartent, FG eſt plus grand que DE. *Fig.* 40.

C'eſt de cet écartement que vient la différence des courbes à double courbure des interſections des ſurfaces de ces corps, ſitués différemment l'un à l'égard de l'autre : car ſi le cône eſt ſcalene, lors même que ſon axe paſſe (comme dans le cas précédent) par le centre de la ſphere C, les ſections planes, faites par les points communs *d* & *e*, ne ſont plus des cercles communs aux deux corps, à moins que les ſec- *Fig.* 41.

tions *fg*, *de* ne fussent *sous-contraires* à la base L N : car dans toute autre situation de section, la ligne *fg*, par exemple, qui est le diametre d'un cercle coupé par un plan dans la sphere, est le petit axe d'une ellipse dans le cône, dont la moitié du grand axe est *m* P, parallele à L N ou L X, rayon du cercle de la base du cône scalene, qui doit être perpendiculaire au plan L S N par l'axe du cône.

Si l'on porte donc la longueur *m* P en *mp*, perpendiculairement à *fg*, qui est dans le même plan, la demi-ellipse *fpg* exprimera la section plane de la moitié du cône, & le demi-cercle *frg* celle de la sphere, par le même diametre, & perpendiculairement au même plan : donc l'intersection des surfaces ne peut être ni cercle, ni ellipse, puisque l'ellipse sort du cône de *r* en *p*, & le cercle est au dedans en *frg*.

Pour connoître de combien l'ellipse s'écarte de la sphere à son grand axe, il n'y a qu'à porter *mp* en *m* M, & tirer M*s* au sommet du cône, dont elle représentera le côté projetté dans l'élévation sur X*s*, & l'on verra que ce côté ne rencontre la circonférence du cercle majeur de la sphere qu'au point *y*, qui est un de ceux de la courbe à double courbure, à un de ses points de section ; d'où tirant une perpendiculaire *yz* à

l'axe, on aura pour la projection de la demi-courbe d'interfection la ligne *fzg*.

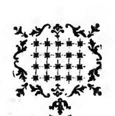
C'eft de cet écartement que viennent auffi les différences des courbes à double courbure des interfections des cônes, avec d'autres corps, fpheres, ou cylindres, parce qu'elles s'écartent plus ou moins, fuivant l'ouverture de l'angle du cône, au lieu que les côtés du cylindre étant paralleles à l'axe, il n'importe que la pénétration fe faffe plus près ou plus loin de la bafe; d'où il réfulte que les ordonnées à l'axe courbe font égales à celle de l'ellipfe foutendante, mais qu'aux pénétrations du cône, ces ordonnées excedent celles de l'ellipfe, à mefure qu'elles s'éloignent du fommet, ou font moindres que celles de l'ellipfe ou du cercle foutendant, fi elles s'approchent de ce fommet; ce qui conftitue une différence de nom d'ellipfimbre & d'ellipfoïdimbre, &c; ce qu'on déterminera au Livre fuivant, lorfqu'il s'agira de la defcription des courbes de ces efpeces fur des furfaces concaves ou convexes.

Il eft facile de conclure quelle fera la courbe d'interfection des furfaces du cône & de la fphere, lorfque l'axe du premier ne paffe pas par le centre de la fphere, en confidérant que la ligne DE n'étant pas parallele à la bafe AB, fera le grand diametre *Fig.* 42.

d'une section plane dans le cône, & celui d'un cercle dans la sphere; ce qui montre que ni l'une ni l'autre ne peut être commune, mais un ellipsoïdimbre, à moins que le cône ne fût scalene, & le diametre DE sous-contraire à celui de la base : alors la section commune sera un cercle.

Application à la pratique.

Cette proposition fait connoître l'espece de la courbe à double courbure d'une lunette ébrasée dans une voûte sphérique, parce qu'une lunette ébrasée est un cône tronqué ou un demi-cône, qui peut avoir sa naissance de niveau à la voûte sphérique, dont l'axe soit dirigé au centre, ce qui est le premier cas, ou de biais, ce qui est le second, ou dont la lunette est surmontée ou surbaissée; ce qui est le cas du cône scalene.



CHAPITRE I.

Des Sections faites par la pénétration des cylindres entr'eux, & avec les cônes.

THÉORÊME I.

Si deux cylindres égaux ou inégaux, dont les axes ſont paralleles, ſe pénetrent mutuellement, plus ou moins intimement, leur ſection ſera un parallélogramme.

On peut faire ſentir cette vérité, en expoſant ſeulement aux yeux l'interſection des cercles de leurs baſes AFBG & DFEG *Fig.* 43. qui ſe coupent aux points F & G communs au grand & au petit cercle, enſorte que la corde FG eſt commune aux différens arcs qu'elle retranche de chacun de ces cercles, ſçavoir FBG dans le grand, & FDG dans le petit. Si l'on ſuppoſe un plan parallele aux axes paſſer par cette corde, il eſt clair qu'il fera un parallélogramme dans l'un & dans l'autre, qui leur eſt commun, comme la corde qui en fait un des côtés; ce qui eſt évident.

USAGE.

Cette propoſition fait voir que les berceaux gothiques DFB, appellés à *tiers point*, *Fig.* 44.

parce qu'ils sont composés ordinairement de deux arcs DF, BF, qui sont de 60 degrés, par conséquent le tiers d'un cercle, doivent être alignés au milieu de leur clef en ligne droite, qui passe par le sommet des angles curvilignes rentrans de chaque voussoir ; de sorte que pour peu qu'elle soit courbe, on doit conclure que les doëles sont irrégulieres d'un côté ou de l'autre.

Par la même raison, les arêtes ou angles saillans des portions de cylindres rassemblées en situation verticale, doivent aussi être en ligne droite, comme on en trouve dans l'ancienne architecture du Temple de la *Galluce* à Rome, & dans la moderne à l'Eglise de la *Sapience*, du dessein de *Borromini*.

THÉORÊME II.

La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres égaux ou inégaux, dont les axes se coupent perpendiculairement ou obliquement, & dont les bases ont un diametre égal & semblablement posé, est une ellipse.

Si l'un des cylindres est droit, & l'autre scalene, ou tous les deux scalenes, elle peut être un cercle.

fig. 45. Soient deux cylindres inégaux ABED, EFGD, dont l'un, sçavoir le dernier, est droit, ayant sa demi-base GKF circulaire, ce

ce qu'on appelle en plein ceintre, & l'autre en demi-ellipse A h B, dont C h est la moitié du petit axe égale au rayon IK. Je dis que l'interfection de leurs surfaces en DHE est une *ellipse plane*.

Il est évident, par la nature du cylindre, que si l'on suppose un plan qui coupe par l'axe C c, perpendiculairement à AB le cylindre ABED, la section qu'il fera sera un parallélogramme représenté ici à moitié par M c C m, dont les côtés M c, m C sont égaux à c h égal (par la supposition) au rayon IK = CH, parce qu'une pareille section dans le cylindre EFGD fera un parallélogramme, dont la moitié est représentée ici par CIGL, lequel étant relevé par la pensée, perpendiculairement à FG, on reconnoîtra que CL, Cm, & CH se confondront en une seule ligne : donc les ordonnées du cercle FKG seront égales au milieu, au demi-petit axe de la courbe d'interfection DHE, & à la moitié du grand ou petit axe c h de l'ellipse A hB, sçavoir du petit axe, si AB est plus grand que FG, & du grand axe si AB est plus petit que FG.

§. On démontrera de la même maniere que si l'on suppose deux autres plans coupant les deux cylindres, parallélement à leurs axes, & perpendiculairement à leurs diametres AB, FG

par les lignes OR, *or*, les ordonnées *rn* du cercle, *o*R de l'ellipse surbaissée DHE & R*n* de la surmontée AHB sont égales entr'elles. Or toutes les ordonnées CH, OR, &c. étant perpendiculaires à ce même plan ADG, sont aussi entr'elles dans le même plan DHE, dont la base est une ligne droite, DE: donc la courbe d'intersection des surfaces de deux cylindres égaux ou inégaux qui se croisent ou se rencontrent suivant un angle quelconque, est une ellipse plane, puisque toutes les ordonnées à son grand axe DE, sont égales à celles du cercle FKG, & en raison de leurs distances des centres C*o* & I*o*, C*o* & C*r*. C. Q. F. D.

Il est évident que cette démonstration sert également pour les cylindres qui se
Fig. 46. croisent, comme en AB, *cd*, puisque ce n'est qu'une prolongation de la figure précédente, qui n'occasionne aucun changement, que l'augmentation d'une nouvelle ellipse de rencontre *gi* égale à *ef*, qu'elle croise dans les mêmes circonstances à l'égard des parties de cylindre prolongées en B & *e*.

Quant à la seconde partie de l'énoncé du théorême, concernant les cylindres scalenes, il est démontré que leur base étant circulaire, peut être égale à une section sous-contraire, & par conséquent à celle

d'un cylindre *droit* de même diametre. Or des figures planes égales peuvent s'adapter à des cylindres inégaux, & devenir leur mutuelle rencontre, ſuivant des angles de direction donnés en certaines circonſtances.

Application à l'uſage.

Cette propoſition eſt ſans contredit une des plus néceſſaires pour la connoiſſance des courbes qui ſe forment à la rencontre des berceaux qui ſont cylindriques, & les voûtes les plus ordinaires en architecture, ſoit en angle rentrant de la concavité des doëles, comme dans la partie A*c*CIGD de la figure 45, ce qu'on appelle en *arc de cloître*, ſoit en angle ſaillant de la doële oppoſée à cet angle rentrant, dont la projection eſt B*c*CIFE, qu'on appelle en *arête*.

COROLLAIRE.

D'où il ſuit que ſi deux demi-cylindres ſe croiſent en ſe pénétrant l'un l'autre, il ne ſe forme plus à leur rencontre que des angles ſaillans à la doële concave ; d'où vient qu'on appelle ces ſortes de voûtes très-ordinaires dans nos Egliſes, *voûtes d'arêtes*, parce que leurs plans ſont en forme de croix † (*).

(*) Il ne ſera pas inutile ici de faire remarquer aux Com-

THÉORÊME III.

La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres droits inégaux, dont les axes se coupent perpendiculairement, est un cycloimbre.

Fig. 47. Soient deux moitiés de cylindre HBEC & IFGK, dont les axes HC & X*n* prolongés se croisent en X perpendiculairement, je dis que la courbe d'intersection de leurs surfaces est un cycloimbre, tel que nous l'avons défini (page 68), c'est-à-dire une courbe à double courbure, qui ne peut être exprimée par une surface plane que par la projection, & dont toutes les ordonnées à l'axe courbe sont égales à celle d'un cercle soutendant, & tous les diametres perpendiculaires à l'axe de profondeur, sont égaux à ceux du même cercle.

DÉMONSTRATION.

Si l'on suppose ces deux cylindres ou demi-cylindres (ce qui suffit) coupés par un plan perpendiculaire à l'axe du grand, & parallele à celui du petit, il fera deux

mençans qu'il y a une erreur de construction dans le Livre de Menuiserie de Me Blanchard (page 68) pour qu'ils la corrigent dans le discours relatif à la planche 17 : il est dit que les élévations tendent au centre (supposé 1er) ; d'où il résulte un *arc en tiers point*, au lieu d'une *ellipse*.

ſections différentes dans ces corps, ſçavoir un demi-cercle HPC dans le grand, & un parallélogramme YZFn dans le petit, dont les circonférences ſe couperont au point Z, qui ſera commun par conſéquent aux deux ſurfaces concaves ou convexes de ces corps, lequel point Z ſera repréſenté ſur le plan paſſant par les deux axes au point Y, qui eſt le plus avancé de tous vers X.

Si l'on ſuppoſe d'autres plans paralleles au premier NHZFn, ils feront toujours la même ſection circulaire dans le grand cylindre, mais de plus petits parallélogrammes dans le petit, ſelon qu'ils ſeront plus ou moins éloignés de l'axe Xn; & comme la ſection circulaire dans le grand ſera toujours la même, on peut rapporter au même demi-cercle NHP toutes les hauteurs des ordonnées du demi-cercle FhG, 01, 02, par des paralleles à l'axe nX, qui couperont ce cercle en des points différens Zzz communs aux deux ſurfaces, deſquels abaiſſant des perpendiculaires ſur la projection des plans coupans les deux corps par les lignes RQ, rq, elles les couperont aux points YyyK qui donneront la projection YyK de l'axe courbe de la commune interſection des deux ſurfaces, auquel ſont appliquées toutes les ordonnées du cercle.

On peut donc reconnoître dans cette

figure les trois lignes principales que nous avons assignées au cicloimbre, sçavoir, 1, le diametre IK soutendant, passant par les points I & K diamétralement opposés & communs aux deux surfaces. 2°. L'axe courbe, dont $Y y K$ est la moitié, & l'autre YI. 3°. L'axe de profondeur PY, par lequel passent perpendiculairement tous les diametres du cicloimbre, lesquels étant tous terminés à la circonférence du petit cylindre, dont PY est une portion de l'axe, sont par conséquent tous égaux; ce qui est une propriété du cicloimbre.

Pour ôter à cette figure la confusion apparente des lignes, il faut élever par la pensée le plan $HZFn$, perpendiculairement aux plans passant par les axes HC, Xn des deux cylindres, & concevoir que sur ce premier plan, ainsi relevé, on y a appliqué en projection verticale les sections d'autres plans qui lui étoient paralleles, passans par les lignes RQ, rq; ce qui montre que toutes les ordonnées au cercle de la demi-base du petit cylindre FhG, sont égales en hauteur à celles de la section, sçavoir $Fn = ZY$, $n2 = VZ$, $n1 = uz$, &c, & que si on releve par la pensée le quart de cercle nhG perpendiculairement au même plan par les axes des cylindres, on aura encore les mêmes ordonnées égales aux précédentes

$u2 = n2$, & $o1 = n1$, &c. lesquelles sont paralleles & égales aux appliquées à l'axe courbe aux points Yyy; ce qui est encore une autre propriété du cicloimbre. Donc, &c.

COROLLAIRE.

Il suit que puisque tous les points de cette courbe sont également sur les deux cylindres, on peut représenter cette courbe à double courbure sur les surfaces de chacun de ces cylindres, qui peuvent être développés en parallélogrammes, & par conséquent les réduire à des courbes planes; ce qui donne une bonne introduction pour la pratique de la coupe des pierres, où l'on peut se servir de panneaux flexibles, comme nous le dirons en son lieu.

Application à l'usage.

Rien n'est plus ordinaire dans les voûtes, que de voir des petits berceaux en percer de plus grands perpendiculairement en tout, ou en partie, en tout, comme un puits dans le milieu d'une voûte de cîterne en berceau, ou en partie, comme les lunettes des nefs des Eglises, où sont les vîtraux qui les éclairent, comme au Val-de-Grace, à Paris & ailleurs.

THÉORÊME IV.

La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres inégaux, dont les axes se coupent obliquement est une ellipsimbre.

Fig. 48. La démonstration de cette proposition se déduit facilement de la précédente, parce qu'il n'y a de différence que dans l'obliquité des intersections des axes, d'où suit celle du contour de la courbe de rencontre des surfaces, relative non au cercle, mais à l'ellipse, dans le quart de cylindre ABCDE*c*, & la moitié d'un autre plus petit LIKN, dont les axes C*c* & MX se rencontrent en X obliquement, suivant l'angle MX*c*.

Si l'on suppose un plan perpendiculaire à celui qui passe par cet angle, il fera dans ces cylindres deux sections différentes, représentées à part, sçavoir par un quart d'ellipse PHX dans le grand cylindre, qui est coupé obliquement, & un parallélogramme LZYM dans le petit, qui est coupé parallélement à son axe, lesquelles sections se croisent en Z, qui sera un point commun aux deux surfaces de ces corps, en supposant ce plan LZHXM élevé en l'air, quoiqu'il soit en partie confondu dans la figure sur celui des axes, lequel Z est projetté en Y.

Présentement si l'on suppose un 3[me] plan tangent au grand cylindre passant par les points communs aux deux surfaces en I & K, il coupera le petit cylindre obliquement par une ellipse I S K, qui sera toute hors du grand cylindre, avec lequel elle n'a que deux points communs I & K, mais qui déterminera la position des points correspondans de la ligne courbe à double courbure de l'intersection des deux surfaces, comme dans le cicloimbre, par la prolongation des côtés du petit cylindre coupé par des plans paralleles au premier I Z H X M; ou, ce qui est la même chose, perpendiculaire au plan par les deux axes des cylindres M X C. Ainsi la perpendiculaire abaissée du point Z sur M X, coupera l'axe du petit cylindre au point Y, qui est le centre de l'axe courbe IYK, où passe l'axe droit de la courbe d'intersection, mais non pas le milieu de cet axe, comme dans le cicloimbre, parce que l'axe de profondeur PY n'est pas perpendiculaire à l'axe de l'ellipse soutendante I K; d'où il suit que la partie I Y, opposée à l'angle aigu I P Y, est plus petite que l'autre Y K, qui est opposé à l'angle obtus de suite Y P K.

Il faut cependant observer que dans l'une & l'autre partie de cet axe courbe, il y a un même nombre des ordonnées du cer-

THÉORÊME V.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux berceaux inégaux, dont l'un pénetre l'autre de toute ſa circonférence, ſans que les axes ſe rencontrent, eſt une ellipſimbre.

Et ſi le petit ne pénetre l'autre que d'une partie de la circonférence, la ſection eſt une ellipſimbre compoſée.

Premiere partie de la propoſition.

Soit F G I K une portion ou zone de cylindre, dont le rayon eſt C K, laquelle ſurface eſt rencontrée par celle d'un autre cylindre A B D E plus petit, dont l'axe N*x* ne rencontre pas celui du grand cylindre prolongé C M: car quoiqu'il paroiſſe le croiſer dans la figure, on peut ſuppoſer un intervalle horizontal de l'un à l'autre, qu'on ne peut repréſenter que par une autre nouvelle figure différemment tournée. *Fig. 49.*

Si l'on ſuppoſe un plan ABDE perpendiculaire à la direction de la ſurface du grand cylindre, qui eſt parallele à celle de l'axe CM, & paſſant par l'axe N*x* du petit, il eſt clair qu'il fera deux ſections différentes dans les deux corps, l'une circulaire H D E I dans le grand, l'autre ſera un parallélogramme A B *l c* dans le petit, dont le trapeze ABDE

eſt une partie, dont les côtés A E & B D coupent la ſection circulaire H I aux points D & E, qui ſont par conſéquent communs aux deux ſurfaces de l'un & de l'autre cylindre, & diamétralement oppoſés dans celle du petit, coupé à ſon axe N x en O.

Préſentement ſi l'on ſuppoſe un troiſieme plan perpendiculaire à celui du parallélogramme par l'axe, & paſſant par les deux points communs D & E, il fera encore deux ſections planes différentes, ſçavoir, une ellipſe D P E S dans le petit cylindre coupé obliquement en D E, & un parallélogramme $fgki$ dans le grand, coupé parallélement à ſon axe R C X en Ts.

D'où il eſt aiſé d'appercevoir, comme dans les propoſitions précédentes, qu'aucune de ces ſections planes ne peut être commune à la rencontre des deux cylindres: par conſéquent que la courbe d'interſection de leurs ſurfaces ſera encore une ellipſimbre, puiſqu'elle ſera relative à la ſection elliptique D P E S, non en prolongeant les côtés du cylindre qui la produit, comme dans les cas d'ellipſimbres précédens, mais en les raccourciſſant de E en S, & de D en S, ſuivant la convexité de l'arc gsk d'un côté, & de même de l'autre en D P E; d'où réſulte une différence de poſition de l'axe courbe qui étoit au dedans

du grand cylindre, & qui se trouve ici à sa surface & circulaire, suivant l'arc DRE.

§. Par la même raison, l'axe droit TS se trouve à la surface du grand cylindre, & par conséquent égal à celui de la section plane PS elliptique, puisque ces deux lignes PS & TS sont terminées par les mêmes côtés du cylindre *a*T, *b*S; il en sera de même de toutes les ordonnées de la section plane elliptique DPES à l'égard de la courbe à double courbure, comme il sera aisé de le reconnoître, en supposant des plans paralleles à l'axe du petit cylindre qui coupent le grand, parallélement à l'axe TS ou PS; ce qui montre l'égalité des ordonnées de l'ellipse plane avec celles de l'ellipsimbre.

COROLLAIRE.

Il suit delà que plus le côté AE du petit cylindre approchera de l'extrêmité du rayon CK, plus la courbe d'intersection des deux surfaces s'alongera, jusqu'à ce que le côté AE soit transporté en I au point d'attouchement de l'arc HR, par le côté LIK, au-delà duquel, si on le pousse, il ne coupera plus la surface du grand cylindre; ce qui constitue le second cas de cette proposition.

SECOND CAS,

Où le petit cylindre tombe en partie hors du grand.

Fig. 50. Soit le demi-cercle ADB, la moitié de la base du grand cylindre, dont le centre est C, & le petit cylindre KLON, dont l'axe XR passe hors du grand, dans lequel il n'y a que le côté LO qui y entre de E en F, où l'on suppose l'intersection des deux surfaces aux points de rencontre du côté LO du petit cylindre, & de la circonférence de la base ADB, qui n'en est pénétrée que dans la partie EDF, le reste du petit cylindre étant dehors du grand.

Si l'on suppose un plan perpendiculaire à l'axe xR passant par le centre C du grand cylindre, il est évident qu'il fera deux sections différentes, l'une circulaire GHI dans le petit cylindre, & l'autre parallélogramme dans le grand, parce qu'il passera par l'axe du grand; & comme ce plan est supposé perpendiculaire à celui de la premiere section par l'axe du petit cylindre, il ne peut être représenté en projection que par la ligne GC, dont la partie GI est le diametre du petit cylindre, dont la demi-circonférence est représentée en GHI, qui coupe la base ADB en y, duquel abaissant

une perpendiculaire $y p$, on aura ſur GC la projection du point y en p, où eſt le milieu des deux parties des ſections ſupérieures pE & inférieure pF, parce que l'arc EDF eſt coupé par une perpendiculaire à ſa corde EF.

Or ſi l'on ſuppoſe un troiſieme plan perpendiculaire à celui du parallélogramme par l'axe du cylindre, & paſſant par les points E & p, il coupera le cylindre en Epe par une ſection oblique, qui y formera une ellipſe, dont Ee eſt le grand axe, duquel pE eſt une partie qui entre dans le grand cylindre; par la même ſuppoſition un plan FpK, pareillement ſitué en ſens contraire, formera une ellipſe dans le petit cylindre, dont la partie pf eſt hors du grand, & le reſte pK eſt compris.

Or par la premiere partie de ce problême, ces ellipſes planes ſont les ſoutendantes d'une ellipſimbre chacune: donc la ſection totale à double courbure eſt une *ellipſimbre compoſée* de deux portions égales qui ſont un angle entr'elles, relatif à celui des deux ſections planes, qui ſe rencontrent aux points commun y d'un côté, & Y de l'autre, qui répond au point p. C. Q. F. D.

Application à l'uſage.

Cette courbe ne peut guere tomber en

pratique dans l'architecture que dans une de ses moitiés : alors ce n'est que le cas d'une ellipsimbre incomplete, parce que dans les voûtes il n'y a que des moitiés de cylindre : d'ailleurs, c'est que si l'ellipsimbre composée étoit en situation horizontale, excédant l'axe du petit cylindre, l'angle d'inflexion tomberoit au dessous de la clef ; ce qui ne pourroit s'exécuter, parce qu'elle pousseroit en contre-bas.

CHAPITRE II.

Des Sections faites par la rencontre des surfaces des cônes & des cylindres qui se pénetrent mutuellement.

IL faut faire une distinction des grandeurs relatives de ces corps pour s'énoncer sur la profondeur de leurs pénétrations, qui peut être de toute la circonférence, ou d'une partie de l'un des deux, considérant que les côtés du cylindre étant paralleles entr'eux, sont limités dans leurs distances à l'axe, mais non pas ceux des cônes qui peuvent s'en écarter à l'infini, en s'éloignant du sommet du cône.

La premiere position relative de ces deux corps dans leur pénétration, est celle où leurs

leurs axes se confondent, étant prolongés, s'il le faut, de sorte qu'ils sont communs; alors, soit qu'ils soient perpendiculaires à leurs bases, comme les cônes & cylindres droits, ou tous les deux scalenes, semblablement posés, leurs interfections sont des courbes planes ou des cercles, comme dans le premier cas, ou des ellipses; & dans l'un & l'autre cas, les diametres de ces sections planes sont paralleles aux bases, comme il est aisé de l'appercevoir, pour peu qu'on ait vu des élémens de Géométrie.

Dans cette circonstance, on doit dire que le cylindre pénetre le cône.

Mais si le cylindre & le cône sont de différentes especes, l'un scalene, l'autre droit, la section sera une ellipsoïdimbre, c'est-à-dire une courbe à double courbure, semblable à une ellipsimbre, comme le signifie le mot tiré du Grec, en ce que ses ordonnées ne sont pas égales à celles de l'ellipse plane, soutendante, mais dont l'excès ou le défaut sont connus, comme nous allons le démontrer.

Soit un cône ASB scalene, pénétré par un cylindre droit FGIH, qui ont leurs axes en partie communs, c'est-à-dire dans la même direction prolongée, sçavoir SC du cône, & xX du cylindre, supposant une section plane par cet axe commun, elle *Fig. 53.*

formera dans le cône le triangle ASB, & dans le cylindre le parallélogramme FGIH, dont les côtés se couperont en D & E, qui sont des points communs aux deux surfaces différentes de ces corps.

Si l'on suppose un second plan perpendiculaire au premier, passant par ces deux points, il fera deux sections différentes, l'une circulaire, exprimée par le demi-cercle DOE dans le cône, parce que DE est parallele à la base AB; l'autre elliptique dans le cylindre coupé obliquement, exprimée par la demi-ellipse DLE, dont DE est le grand axe, & $mL = Hx$ est le petit.

Puisque ces deux sections sont différentes, il est clair que ni l'une ni l'autre ne peut être l'intersection des deux surfaces, mais que ce sera une courbe à double courbure, dont on veut connoître le rapport des ordonnées avec celles de l'ellipse du cylindre.

Pour y parvenir, on prendra dans le diametre DE un point P à volonté, d'où l'on tirera une ligne PS au sommet du cône S, & du même point une perpendiculaire PO à ce diametre DE, qui coupera le demi-cercle DOE au point O, & la demi-ellipse inscrite au point K.

On portera cette ligne PO avec sa divi-

ſion K en PQ, perpendiculairement à PS, & l'on tirera QS, qui repréſentera le côté du cône coupé perpendiculairement au triangle par l'axe DSE ſuivant la ligne PS; enſuite par le point K, on tirera une parallele à PS qui coupera le côté QS au point y, & une autre yz parallele à PQ qui coupera PQ en z.

Préſentement à cauſe des triangles ſemblables QSP, QyK, on aura PQ = PO : KQ = kO :: PS : Ky, & PQ : QS :: kQ : Qy, c'eſt-à-dire la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de l'ellipſe plane eſt à cette ordonnée, comme la profondeur yk ou ſon égale PZ de la ſection ſolide à cette ordonnée, eſt à la différence des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide, ce qui conſtitue l'ellipſoïdimbre ; ſuivant notre définition ; & parce que nous ſuppoſons dans la figure la ligne yZ parallele à PQ, le point Z ſera un de ceux de l'axe courbe DZE ; ce qu'il falloit faire & démontrer : car quelqu'autre point que P, qu'on prenne dans l'axe DE, on aura toujours la même analogie.

Application à l'uſage.

La premiere partie de cette propoſition fait voir que l'arête de rencontre de l'ébraſement & du tableau d'une porte en plein

ceintre, ſurmontée ou ſurbaiſſée, eſt de même nature de courbe que ces deux différentes doëles, ſi l'axe, qu'on peut réunir au centre de l'épure, eſt commun au berceau & à l'ébraſement.

La ſeconde fait voir que ſi le tableau de la porte eſt un berceau en plein ceintre, & que l'ébraſement ſoit ſurmonté ou ſurbaiſſé, quoique d'un centre commun, l'arête que formera la rencontre des deux doëles, ne ſera plus une courbe plane qu'on peut bornoyer par un à plomb, mais une courbe à double courbure, comme celle des lunettes dans un berceau.

Nous venons de ſuppoſer que les axes ſe confondent: il faut examiner préſentement ce qui arrive lorſqu'ils ſe croiſent.

Il eſt un cas unique, dont j'ai parlé dans ma Stéréotomie, où la courbe d'interſection eſt une ellipſe ; mais comme c'eſt un grand hazard qu'il tombe en pratique, nous croyons pouvoir le paſſer dans cet abrégé, renvoyant les curieux au théor. 24 du premier tome, parce que nous donnerons dans la ſuite un moyen général de ſuppléer à la théorie de ce cas pour l'exécution.

THÉORÊME I.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre & d'un cône qui ſe croiſent, enſorte que leurs axes ſe coupent, ou au contraire qui ſont paralleles entr'eux, eſt une ellipſimbre.

Premier cas, lorſque les axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement.

Soit un cône ASB pénétré par un cylindre DHFE, dont les axes SC & xX ſe croiſent en K, ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par ces deux axes, il fera deux ſections différentes dans ces corps, ſçavoir dans le cône un triangle par l'axe, par exemple ISL, & un parallélogramme DHFE dans le cylindre, dont le trapeze qui en eſt une partie dans le cône, le coupe à la ſurface, ſuivant une ligne EF oblique à l'axe xX, par laquelle, ſi on fait paſſer un plan perpendiculaire à celui du parallélogramme par l'axe, il ſe formera une ellipſe dans le cylindre, qui ſera tangente au cône, & toute hors de ce cône, & de laquelle cette ligne EF ſera le grand axe; & comme cette ellipſe plane eſt toute hors du cône, depuis le point E juſqu'en F, qui ſont communs aux deux ſurfaces, leur interſection ſera en dedans en EzyF d'un côté, & de même Fig. 54.

de l'autre, qu'on n'a pas tracé pour éviter la confusion des lignes.

Présentement si l'on suppose un plan perpendiculaire au premier, passant par l'axe du cylindre, il fera dans ce corps un parallélogramme pdR M, & un cercle, ou une ellipse dans le cône qui coupera sa surface en yXt, dont MR est la tangente terminée par les côtés PM & dR du cylindre, qui coupent la surface du cône aux points y & t, qui sont par conséquent communs aux deux surfaces coniques & cylindriques: d'où il suit que yM & tR étant les distances de la tangente au cône, sont égales; par conséquent yt égale à MR, c'est à-dire l'ordonnée de la section solide égale à la section plane; ce qui constitue l'ellipsimbre: on prouvera de même que zg est égal à nr, & ainsi d'autant de points qu'on voudra chercher dans cette courbe, par des sections planes paralleles à la précédente.

Pour le second cas, où l'on suppose les axes du cône & du cylindre paralleles entr'eux, la même figure & démonstration peut servir, en supposant un cylindre 1, 2, 3, 4, dont l'axe VX est parallele à celui du cône SC: car la même ellipse ERFM peut être considérée comme une section oblique de ce cylindre coupé par un plan tangent au cône, & suivant la ligne du côté du cône

EF; ce qu'on appercevra avec un peu d'attention.

COROLLAIRE.

Il n'eſt pas difficile de reconnoître que les interſections des cylindres & des cônes qui en ſont pénétrés, ne ſont égales à l'entrée & à la ſortie que dans le cas où leurs axes ſe coupent perpendiculairement; car pour peu qu'ils ſoient inclinés, l'interſection qui eſt la plus près du ſommet du cône, doit toujours être plus petite que ſon oppoſée, parce qu'elle approche plus de la perpendiculaire au côté du cône, qui eſt d'ailleurs plus étroit en cette partie.

Nous avons examiné ci-devant la ſection qui ſe fait à la ſurface de ces deux corps, lorſque le cylindre pénetre le cône. Il faut préſentement conſidérer celle qui réſulte de leur pénétration mutuelle, lorſque le cône pénetre le cylindre; ce qui paroît, du premier abord, la même choſe énoncée différemment, mais cependant qui ne l'eſt pas: car on a vu que de la premiere combinaiſon il en réſultoit une ellipſimbre, & dans celle-ci unè ellipſoïdimbre, dans toutes les poſitions qu'on peut y conſidérer. 1°. Lorſque l'axe du cône coupe perpendiculairement celui du cylindre; 2°. lorſqu'il le coupe obliquement; 3°. lorſ-

que l'axe du cône ne rencontrant pas celui du cylindre, tombe obliquement sur le côté, & entre en tout ou en partie de sa circonférence; 4°. lorsqu'il n'y a qu'une partie de son contour qui entre dans le cylindre obliquement.

Dans tous ces cas, quoique fort différens, la section est une ellipsoïdimbre : soit un cylindre ABED pénétré par un cône FGS, dont les axes *c*X & TS se coupent perpendiculairement ou obliquement en O.
Fig. 55.
Si l'on suppose un plan passant par ces axes, il est évident qu'il fera deux sections rectilignes dans ces corps, sçavoir un parallélogramme dans le cylindre, que nous représenterons ici pour la commodité de la figure par N*nr*R, & un triangle dans le cône FSG, dont nous supposerons le cercle de la base FHG*h* dans un plan tangent au cylindre, suivant le diametre FG, qui est seul commun à la surface du cylindre, & à la base du cône, le reste de ce cercle ou ellipse étant tout hors du cylindre; ensorte que la courbe de l'intersection des deux surfaces de ces corps sera au dessous, par exemple en FK*l*GL, avec laquelle elle n'aura que les deux points communs F & G.

Si l'on tire des ordonnées H*h*, *li* à ce diametre ou axe d'ellipse FG, elles toucheront la surface convexe du cylindre aux

points T & t, & feront perpendiculaires aux lignes menées au fommet T S, t S.

Préfentement fi l'on fuppofe des plans paffans par ces ordonnées & le fommet du cône, ils feront deux fections différentes, fçavoir un triangle H S h, I S i dans le cône, & un cercle ou une ellipfe dans le cylindre, dont Ktk ou LTl feront des arcs, & les ordonnées Kk & Ll feront les cordes, lefquelles feront plus petites que les ordonnées à la bafe du cône, parce qu'elles approchent plus du fommet du cône, dont les côtés HS, hs font convergens : il s'agit d'en déterminer la différence, laquelle étant petite dans la figure, pourroit y caufer de la confufion ; c'eft pourquoi nous avons mis à part une moitié des triangles des fections par le fommet du cône avec les mêmes lettres, par exemple H T S : fi l'on tire par le point z de l'interfection des deux furfaces une ligne zp parallele à S T, on aura deux triangles femblables H T S, Hpz, dans lefquels on aura les analogies fuivantes S T : T H :: Zp : pH, c'eft-à-dire que la diftance du fommet du cône à l'ordonnée du cercle ou de l'ellipfe plane de la bafe, eft à cettte ordonnée, comme la profondeur de la fection folide au deffous de la plane, eft à la différence de cette ordonnée avec celle de la fection *Fig. 56.*

ſolide : donc la courbe FKLG, &c. eſt une *ellipſoïdimbre*, ſuivant notre définition. C. Q. F. D.

Suppoſant que le cône traverſe le cylindre, il eſt clair qu'il s'y fera deux ſections oppoſées, une vers le ſommet qui ſera la plus petite, & une vers la baſe qui ſera la plus grande, & que les deux ſections ſolides auront leurs axes courbes tournés en ſens contraires ; ce qui ne change rien à l'analogie, mais qui donne des différences inégales, les unes en excès, les autres en défaut.

Il eſt encore viſible que le même rapport des différences ne peut être appliqué à toutes les ordonnées, mais chacune d'entr'elles a un rapport différent à ſa correſpondante.

Si l'axe du cône ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement ſur un côté, c'eſt-à-dire une ligne droite priſe à ſa ſurface, & parallele à ſon axe, la courbe d'interſection ſera encore de même eſpece.

Fig. 57. Soit SP une partie de l'axe du cône qui tombe perpendiculairement ſur le côté du cylindre HI, & un plan SEL coupant le cylindre perpendiculairement à la ligne HI, il coupera auſſi de même les paralleles R*r*, Q*q*, menées par les points E, L, in-

terſections de la ſurface du triangle par l'axe SEL, & des côtés du cylindre Rr, Qq; ce qu'on n'a pu exprimer dans la figure, pour éviter la confuſion des lignes de perſpective ou de projection, où le triangle n'auroit dû être déſigné que par la ſeule ligne EL; d'où il réſulte que les points E & L ſont communs aux deux ſurfaces du cône & du cylindre, puiſqu'ils ſont les interſections de leurs côtés qui ſe croiſent.

Si l'on ſuppoſe enſuite un ſecond plan paſſant par ces deux points communs E & L, parallélement à l'axe du cylindre, il ſera deux ſections différentes, l'une en parallélogramme RrqQ dans le cylindre, & une ellipſe dans le cône ElLp qu'il coupe obliquement à l'axe SC.

Préſentement ſoit que l'on tire des ordonnées à l'axe EL de la ſection plane, ou des paralleles qui ſeront les ordonnées à ſon axe conjugé; il eſt évident qu'elles ſeront toutes dans le cylindre, parce qu'étant toutes plus petites que le diametre de l'ellipſe EL, elles ne pourront atteindre à la ſurface du cylindre, dont les bornes ſont les lignes paralleles Rr, Qq du parallélogramme, qui eſt la ſection parallele à l'axe du cylindre, paſſant par les points EL, dans lequel parallélogramme eſt l'ellipſe E$p$$l$L qui eſt celle du cône; donc les ordonnées

à la section solide, dont l'axe courbe est l'arc E T L de la surface du cylindre seront plus près du sommet du cône S, & plus courtes.

Premiérement plus près, parce qu'étant plus courtes que E L, & devant se terminer à la circonférence de l'arc de section du cylindre R Q, dont la corde est égale à E L; elles y seront inscrites plus loin du centre de la section que R Q, par la 15ᵉ pr. du 3ᵉ Liv. d'*Eucl.*

Secondement plus courtes que les ordonnées de la section plane, parce qu'étant terminées par les côtés du cône, qui sont convergens, celle des paralleles, qui approche le plus près du sommet S, de la section triangulaire dans le cône, sera plus petite d'une quantité connue par l'analogie commune aux ellipsoïdimbres, dont nous avons parlé à la premiere partie de cette proposition, pour laquelle nous mettons une figure à part pour éviter la confusion de trop de lignes dans la figure.

Fig. 58 Soit le triangle D S *d* celui d'une des sections du cône par son sommet, & l'ordonnée D *d* de la figure précédente, dont le plan coupe aussi le cylindre suivant l'arc G P *g* circulaire ou elliptique, dont la corde G *g* est égale à E L, parce qu'elle lui est supposée parallele & comprise entre les deux

côtés du parallélogramme Rr Qq.

Si des points D & d on tire des lignes au ſommet du cône S, elles couperont cet arc aux points Y & y, qui ſeront communs aux deux ſurfaces du cylindre & du cône, & donneront pour ordonnées de la ſection ſolide la ligne Yy, au lieu de ſa correſpondante Dd dans l'ellipſe plane E L dD du cône, qui eſt plus grande ; ainſi la différence ſe trouvera par la même analogie qu'à la premiere partie de cette propoſition. Ayant tiré SM au milieu M de Dd, & yv, Yu paralleles à SM, on aura SM : Md : : yv à vd ; ou, ce qui eſt la même pour l'autre moitié, SM : MD : : YV : VD, c'eſt-à-dire la diſtance de la ſection plane elliptique ſoutendante eſt à ſon ordonnée, comme la profondeur où diſtance de l'ordonnée de la ſection ſolide à la ſection plane, eſt à leur différence que l'on cherche, parce que les triangles SMD & yuD ſont ſemblables, étant tous les deux rectangles, & ayant l'angle D commun ; *ce qu'il falloit faire & démontrer*, pour prouver que la courbe à double courbure eſt une *ellipſoïdimbre*.

Il eſt aiſé de reconnoître que s'il s'agiſſoit de la ſection courbe, la plus près de la baſe du cône, les différences des ordonnées qui ſont ici en défaut, ſeroient en excès à l'égard de la ſection plane dans le

cône, foutendante à celle à double courbure.

USAGE.

Cette propofition fert à faire connoître quelle eft la courbe de l'arête d'enfourchement de toutes fortes de lunettes ébrafées dans les berceaux, foit qu'elles aient leur naiffance de niveau avec celle du berceau, qui eft le cas où les axes du cône & du cylindre fe rencontrent, foit que leurs naiffances foient à différente hauteur ; ce qui eft le cas où les axes ne fe rencontrent point.

Des interfections des furfaces des cônes qui fe pénetrent mutuellement.

Les différentes grandeurs relatives des cônes qu'on peut fuppofer fe pénétrer & la pofition de leurs axes, fuppofés paralleles ou fe croifer en fe coupant, ou fans fe rencontrer, peuvent former différens cas de
fig. 59. et 60. courbes planes, ou à double courbure, originaires, non feulement des cercles & des
fig. 61. 62. 63. 64. ellipfes, mais encore des paraboles & des hyperboles qui donnent des paraboloïdimbres & hyperboloïdimbres, dont les cas ne tombent prefque jamais en pratique, parce que les voûtes coniques font très-rares dans les ouvrages ordinaires d'architecture, excepté dans les trompes & les lunettes

ébrafées, ou des embrafures de canons, qu'on ne fait prefque plus en pierres de taille: or ces trompes, lunettes & embrafures ne font rencontrées par d'autres furfaces coniques, que dans des cas qui font auffi fort rares, & prefque hors d'ufage préfentement.

Les revêtemens de fortifications qui font en talud, offrent des furfaces coniques, lorfqu'ils font circulaires par leurs plans, ou concaves, comme les flancs, à la maniere du premier fyftême de M. de Vauban, ou convexes, comme les orillons du même fyftême; alors s'il y a des embrafures dans le flanc ou dans l'orillon, c'eft le cas d'un cône qui en pénetre un autre, dont les axes fe croifent en fe rencontrant, ou fans fe rencontrer, fuivant la ligne de direction du milieu de l'embrafure.

Dans l'architecture civile, pareils cas n'arrivent guere; je n'ai vu de voûte conique confidérable dans fa grandeur, que celle du berceau du grand efcalier du Vatican: s'il y avoit des lunettes ébrafées, ce feroit encore le cas de la rencontre de deux furfaces de cônes de grandeurs bien différentes, dont les axes fe croiferoient en fe rencontrant, fi les naiffances étoient de niveau ou leurs axes, ou fans fe rencontrer fuivant la différence du niveau, ou la direction des axes.

Ailleurs les cas des voûtes coniques qui se croisent sont si rares, que je ne crois pas devoir m'y arrêter dans un Livre élémentaire, où l'on ne doit pas s'amuser à de simples curiosités, sur lesquelles un lecteur plus curieux peut consulter ma Stéréotomie, & y trouver de quoi se satisfaire sur la connoissance des courbes qui résultent de l'intersection des surfaces des cônes de différentes grandeurs & positions.

Il suffira pour la pratique de la coupe des pierres d'avoir une méthode commode d'exécuter les cas d'enfourchement de ces sortes de rencontres de surface, que nous donnerons au second Livre.

Des intersections des surfaces des sphéroïdes, pénétrés par des spheres, sphéroïdes, cônes, ou conoïdes.

Nous pourrions avec plus d'apparence d'application à l'usage, parler ici de la nature des courbes des intersections de ces surfaces; mais la même nécessité d'abréger ces élémens, nous engage à renvoyer les lecteurs, qui seront curieux de s'en instruire, à la même source de ma Stéréotomie, chap. 8 du premier Livre, dans le dessein de nous étendre un peu plus particuliérement sur le second Livre, qui comprend les

les problêmes de Géométrie indifpenfables, pour être en état d'opérer dans les defcriptions des lignes courbes qui fe préfentent en différentes circonftances de données pour la pratique des épures, c'eft-à-dire des repréfentations exactes & mefurées des corps entiers ou coupés en plufieurs parties par des furfaces planes ou courbes.

De la defcription des lignes courbes, formées par la fection des corps.

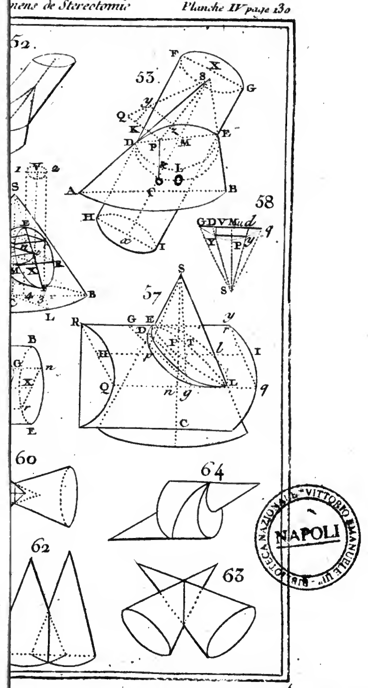
Nous avons examiné dans le Livre précédent la nature & les propriétés des lignes courbes, formées par les fections des corps coupés par des furfaces planes, ou pénétrés par des folides. Il s'agit à préfent de les décrire fur les furfaces où elles peuvent être tracées.

Il eft évident que celles de la premiere efpece peuvent être décrites fur une furface plane, puifqu'elles peuvent être dans le couteau plan qui a divifé le corps, ou fur la nouvelle furface formée par cette divifion, dont le contour eft la ligne courbe que nous cherchons.

La feconde efpece de fection, qui eft l'effet de la pénétration de deux furfaces courbes qui entrent l'une dans l'autre, peut être quelquefois tracée fur une furface

plane, comme celle des ſpheres égales ou inégales, dont la courbe d'interſection eſt toujours un cercle; mais il en eſt d'autres compoſées de deux courbures, auxquelles on peut aſſigner trois dimenſions, comme aux corps ſolides, longueur, largeur, & profondeur; celles-ci ne peuvent être décrites que ſur une ſurface concave ou convexe: nous allons traiter de l'une & de l'autre eſpece de ces courbes en particulier.




52.
53.
F X S G Q y K E D P M L O A C B H x I
58
G D V M u d q Y P y S
57
S R G E D y r H p P T l I Q n g L q C
z V a S E M X L B
B G n X r E
60
64
62
63

4

TROISIEME PARTIE.

De la description des lignes courbes planes les plus usuelles pour la coupe des pierres.

CHAPITRE I.

Des lignes courbes qui résultent de la section d'un cône.

SECTION I.

Du Cercle.

COmme nous supposons nos lecteurs initiés dans les élémens de Géométrie, qui traitent amplement du cercle, nous ne parlerons que de quelques pratiques utiles à notre Art, qu'on n'y trouve pas expressément, mais seulement par induction des propositions connues.

PROBLEME.

Par trois points donnés, tracer un arc de cercle par plusieurs points trouvés, sans connoître le diametre ni le centre, ou par un mouvement continu sans compas.

On ſçait qu'on ne peut ni déterminer, ni tracer un arc de cercle, à moins de trois points donnés, parce que par deux ſeuls points on peut faire paſſer une infinité de cercles d'inégales grandeurs.

La pratique ordinaire que les ouvriers appellent *les trois points perdus*, conſiſte à chercher le centre; mais nous ſuppoſons ici qu'on ne le peut, faute de place aſſez étendue, ou parce qu'elle eſt embarraſſée de quelque obſtacle.

Premiere méthode par pluſieurs points.

Soient les trois points donnés A, M, B diſpoſés comme on voudra les uns à l'égard des autres, pourvu qu'ils ne ſoient pas en ligne droite, parce qu'alors le centre du cercle ſeroit infiniment loin.

Premier cas. Lorſqu'un des trois eſt au milieu des deux autres; ce qui arrive très-ſouvent en architecture, où l'on détermine ordinairement les extrêmités & le milieu *Fig. 65.* d'un ouvrage : alors tirant une ligne droite d'une extrêmité à l'autre, & une perpendiculaire à cette ligne, paſſant par le point du milieu, on connoît la corde & la fleche de l'arc de cercle qu'on doit décrire; & ſi l'on joint ces points A, M, B par des lignes droites, on a le triangle AMB inſcrit dans l'arc de cercle qu'on cherche.

On fera avec un cordeau ou une ouverture de compas, prise à volonté du point A pour centre, l'arc F E qui coupera A M en F, & du même point A on tirera à volonté la ligne indéfinie A K entre les côtés A M & A B, laquelle coupera l'arc FE au point G ; ensuite du point B pour centre, & la longueur A E pour rayon, on décrira l'arc indéfini *fe* hors du triangle AMB, & l'on portera sur cet arc la corde F G en *fg*, pour tirer par ce point *g* la ligne B*g*, qui coupera la précédente A K au point *x*, lequel sera à la circonférence de l'arc de cercle demandé A M *x* B. Par une semblable opération, on trouvera le point *h*, & tant d'autres que l'on voudra, ainsi que le point *i*, entre A & M, faisant le premier arc *no* du centre B en dedans, & son correspondant, & égal en dehors en *pq*, qui donnera le point *q*, par lequel on tirera A*q*, qui coupera B*i* en *i*, ou sera un quatrieme point de la circonférence de l'arc demandé, & avec une regle mince & pliante, fixée par des clous sur les points A, *i*, M, *h*, *x*, B, on tracera le contour du cercle demandé. C. Q. F. F.

Second cas où l'on n'a pas le point M du milieu, mais un autre en quelque endroit, comme en D.

Du point A pour centre, & de l'inter- *Fig. 66.*

valle AD pour rayon, on décrira l'arc DE pour mesure de l'angle DAE, & avec le même rayon AD, & du point B pour centre, on décrira l'arc indéfini *de*, sur lequel on prendra *ed* égal à DE, le point *d* sera le quatrieme de l'arc de cercle que l'on veut décrire AD*d*B. Pour en avoir un cinquieme ensuite, ayant tiré la ligne BD du point D pour centre, & de l'intervalle D*d* pour rayon, on fera l'arc *d*F qui coupera DB au point F, puis du point B pour centre, & avec le même rayon D*d*, on fera l'arc indéfini G*f*, sur lequel on prendra G*f* égal à *d*F; le point G sera le cinquieme de l'arc demandé. On trouvera de même le sixieme, en tirant la corde A*d*, & du centre *d* faisant l'arc DH, & du centre A, l'arc IK, &c. ainsi de suite, sur d'autres cordes tirées par des points connus.

La démonstration de ces deux pratiques est fondée sur cette proposition élémentaire d'*Euclide*, Liv. 3, p. 21, que tous les angles faits dans un même segment de cercle sont égaux entr'eux : car dans le premier cas l'angle AMB étant donné, il faut que tous les autres, appuyés sur les points A & B, dont le sommet atteint à la circonférence, lui soient égaux; par conséquent que les deux angles à la base AB qui deviennent inégaux, lorsque le sommet

eſt ailleurs qu'au point M, faſſent une ſomme de degrés égale au ſupplément à deux droits de l'angle conſtant à la circonférence, qui doit toujours avoir la même ouverture : ainſi ayant tiré à volonté une ligne AK entre les lignes AM & AB, on a diminué l'angle MAB d'un arc FG, & l'on a augmenté d'autant l'angle ABM, en lui ajoutant l'arc *fg* : donc la ſomme de ces deux angles à la baſe eſt égale au ſupplément à deux droits de l'angle donné AMB : donc l'angle A*x*B eſt égal à l'angle AMB. C. Q. F. F.

Dans le ſecond cas, il eſt viſible par la conſtruction, que le point D étant donné, l'angle ADB eſt à la circonférence de l'arc de cercle, & que l'on a fait, comme au premier cas, la ſomme des angles à la baſe AB égale au ſupplément à deux droits de l'angle donné ADB : car l'angle DAB, & le côté AD ayant été faits égaux, l'un à l'angle *d*BA, & l'autre au côté *d*B ſur une baſe commune AB, les deux triangles ADB, B*d*A ſont égaux entr'eux : donc le point *d* eſt à la circonférence ; *ce qu'il falloit faire* pour avoir un quatrieme point de l'arc demandé : par la même raiſon les triangles D*d*A & IA*d* ſont égaux en tout : par conſéquent les angles AI*d* & *d*DA dans le même ſegment AD*d* étant égaux,

leurs sommets I & D sont à la circonférence. C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

De ce principe on tire une maniere fort simple, & facile de décrire l'arc demandé *organiquement* par un mouvement continu; il ne s'agit que de faire avec deux regles égales, chacune à la corde AB, un angle Fig. 67. AMB ou ADB égal à celui qui est donné dans le segment, dont on fixera l'ouverture par une écharpe PR; puis ayant planté deux clous ou chevilles saillantes L, I aux deux extrêmités de l'arc AB sur la place où on doit le décrire, on fera mouvoir le sommet M ou D de cet angle, en appuyant ses branches, & les faisant couler le long des clous L, I à droite & à gauche, après avoir attaché un crayon ou une pointe au sommet de l'angle M ou D; ce crayon, par le mouvement de rotation, décrira l'arc de cercle que l'on cherche.

USAGE.

Ce problême est extrêmement utile en plusieurs circonstances de l'architecture militaire : par exemple, à tracer les arcs d'arrondissement des contrescarpes devant des angles flanqués obtus, où le centre est occupé & enfermé par les revêtemens des escarpes.

SECTION II.

De la description de l'Ellipse.

Nous avons dit que la section plane d'un cylindre, coupé obliquement à son axe, étoit une ellipse : par conséquent les faces obliques des berceaux en plein ceintre, & les berceaux surmontés & surbaissés sont elliptiques ; d'où il suit que l'on a très-souvent occasion de tracer cette espece de ligne courbe.

PROBLEME I.

Décrire par plusieurs points tant d'ellipses que l'on voudra, qui soient toutes des sections obliques d'un même cylindre (ou en termes de l'Art) *faire des cerches ralongées du plein ceintre.*

Soit ABED la section d'un cylindre par l'axe XC, il est clair par la définition du cylindre *droit*, que toutes les sections perpendiculaires à l'axe sont des cercles égaux : il n'en est pas de même des sections planes obliques ; elles sont toutes inégales, suivant le plus ou le moins d'obliquité de la section, comme il paroît par la différence des longueurs des diametres BF, BG, BD, sur lesquels, en portant les ordonnées au *Fig. 6*

diametre du cercle, on a des ellipses plus ou moins alongées, comme on va le montrer par une pratique très-simple, qui donne tout d'un coup les divisions proportionnelles des abscisses de toutes ces différentes obliquités : il suffira, pour l'exemple, de tracer un quart de ces figures.

Fig. 69. Soit AMC le quart de cercle, qui est la base du cylindre droit, & le parallélogramme ACXD celui de la section par l'axe CX du cylindre : soient aussi les lignes CF, CD les profils des plans perpendiculaires à ce parallélogramme, & obliques à l'axe CX, suivant les directions CF, CD.

On tirera sur le rayon AC du quart de cercle autant de perpendiculaires que l'on voudra, prolongées jusqu'à la base DX qui couperont les lignes CF, CD aux points S, V, proportionnellement aux divisions du rayon AC. Si sur chacune de ces divisions on place perpendiculairement les ordonnées correspondantes du quart de cercle, on aura celles des ellipses, qui sont des ralongemens de ce cercle, lesquelles étant plus écartées les unes des autres, donnent des quarts d'ellipses inégalement alongées; sçavoir F*gh*I, peu différente du contour du quart de cercle AOM, & DL*l*M qui l'est davantage; ce que la figure montre sensiblement.

D'où il suit que si le demi-diametre ou moitié du grand axe est donné de longueur, comme CD, ayant ouvert le compas de cette longueur, & posé une des pointes en C, on fera avec l'autre un arc qui coupera la perpendiculaire AD en un point, comme D; de sorte que si l'on mene une ligne droite par les points C & D, elle sera coupée par toutes les ordonnées du quart de cercle, prolongées aux points D, *v*, V, *u*, C, sur lesquels posant les ordonnées correspondantes dans le quart de cercle *or*, OR, *or*, on aura à leurs sommets les points *l*, L, *l*, M, par lesquels on tracera le contour de l'ellipse par le moyen d'une regle pliante, comme nous l'avons dit ci-devant pour le cercle. C. Q. F. F.

USAGE.

On peut dire qu'il n'est point de trait de pratique plus usuelle que celui-ci, qu'on appelle la *cerche ralongée*, parce que les voûtes en berceaux cylindriques étant les plus ordinaires dans les édifices, les obliquités qui se rencontrent aux faces, ou l'exhaussement, ou le surbaissement du contour de leurs ceintres, sont des ellipses assujetties au contour de leurs ceintres circulaires, soit dans les cylindres *droits*, coupés obliquement, soit dans les cylindres

ſcalenes qui ne ſont pas coupés par des plans paralleles à leur baſe circulaire : ainſi les ellipſes ſe trouvent partout où il y a de l'obliquité à l'axe, ou à l'égard de la baſe.

PROBLEME II.

Les axes d'une ellipſe étant donnés, la tracer par un mouvement continu.

Fig. 70. On peut tracer une ellipſe de pluſieurs manieres par un mouvement continu, 1°. avec un cordeau, 2°. ou avec un inſtrument fait exprès.

Par le moyen d'un cordeau, les deux axes AB, DE étant donnés, & mis dans leur ſituation à angle droit, au milieu en C, on portera la longueur du demi-grand axe AC, ou BC comme un rayon de cercle poſé en D pour centre, d'où l'on tracera un arc *gh* qui coupera l'axe AB en F vers A, & en *f* vers B; ces deux points F & *f* ſont les *foyers* dans leſquels on plantera deux clous ou deux chevilles pour y attacher les bouts d'un cordeau qui ſera exactement égal à la longueur AB du grand axe; puis mettant un crayon ou une pointe dans le pli que ce cordeau lâche fera, étant tendu en I, D, K, L, E, &c. on fera couler ce crayon dans le pli, en tournant de A en D en deſſus, & E en deſſous : on aura cette

ellipſe parfaite, que les ouvriers appellent, lorſqu'elle eſt ainſi décrite, *le trait du Jardinier*.

Il faudra ſeulement obſerver de tirer toujours également ſur le piquet ou crayon qui doit couler dans le pli, afin que le cordeau ne s'alonge pas plus dans un endroit que dans l'autre, afin que le contour ſoit toujours uniforme, comme il doit être, ne faiſant point de ces ondulations, qu'on appelle des *jarrets*.

Lorſque l'ellipſe eſt un peu grande, il eſt aſſez difficile d'obſerver cette tenſion du cordeau, auſſi exactement qu'il le faut, pour éviter toute irrégularité; c'eſt pourquoi on préfere à cette méthode celle des inſtrumens de bois qui ne peuvent s'alonger ni ſe raccourcir: il y en a de différentes façons, dont le plus commun eſt celui qu'on appelle *compas à ovale*, qui conſiſte en une double équerre, dont j'ai donné la deſcription dans le ſecond Livre de ma Stéréotomie, & qui eſt connu de tout le monde; mais comme il en eſt un plus ſimple, qui ne conſiſte qu'en une regle briſée, pliant ſur un pivot, nous le propoſerons ici comme moins compoſé, & de plus prompte exécution.

Seconde maniere avec un inſtrument très-ſimple, & par un mouvement continu.

Ayant porté le demi-petit axe CD sur le grand axe en C*d*, on aura leur différence en A*d*, qu'on divisera en deux également
Fig. 71. en *m*, ou leur somme *d*B en M ; on assemblera deux regles égales, chacune à la moitié de la somme MB, par le moyen d'une cheville ou d'un clou arrondi ; comme CG, GH en G, ou bien deux regles d'inégale longueur, l'une C*n* égale à la différence A*m* des deux demi-axes, l'autre *na* égale au demi-grand axe AC : puis ayant pris une troisieme regle égale à quatre fois CG ou deux fois *d*B, pour la premiere construction, avec les regles CG, GH, ou seulement au grand axe AB pour la seconde, on attachera au milieu C la regle CG, ou bien C*n*, par un pivot, dont le milieu soit sur un des côtés de la grande regle, dans l'arête de son alignement.

On portera ensuite sur la branche GH la longueur A*m* en G*x* pour y poser un crayon ou une pointe propre à tracer le contour de l'ellipse, ou sur la regle *na* en *nr*, pour y poser une cheville ou un clou arrondi, propre à s'appuyer & couler le long de la grande regle, pendant que le crayon posé à l'extrêmité *a* tracera le contour de l'ellipse, la regle *an* tournant sur un pivot *n*, & *n*C sur le centre C : c'est ainsi qu'en fermant ou en ouvrant l'angle CGH, le

crayon x tracera le contour de l'ellipſe, ainſi qu'il paroît par la grande ouverture ponctuée Cgh, le point x ſuivant toujours la circonférence de cette courbe.

La démonſtration de cette opération eſt à la page 137 & 138, Livre II, du premier tome de ma Stéréotomie, édition de Strasbourg, & 164 de l'édit. de Paris ; nous ne la mettons pas ici pour abréger, parce qu'elle ſuppoſe une nouvelle figure.

Comme les axes ne ſont pas toujours donnés, mais ſeulement des diametres conjugués, il eſt à propos de montrer l'uſage qu'on en peut faire.

PROBLEME III.

Deux diametres conjugués qui ne ſont pas les axes étant donnés, tracer une ellipſe par pluſieurs points, ou par un mouvement continu, ſans connoître les axes ni les foyers.

Soient donnés les deux diametres conjugués AB, DE, on menera par le point D une ligne DT parallele à AB, & par le centre C de leur interſection une perpendiculaire CF à la ligne DT. *Fig. 72.*

Du point C pour centre, & CF pour rayon, on décrira un quart de cercle HF, & du même point C, & de l'intervalle CB pour rayon un autre quart GB, oppoſé au

premier au sommet; on les divisera l'un & l'autre en un même nombre de parties égales, par exemple, chacun en quatre aux points 1, 2, 3, par lesquels on menera des paralleles indéfinies, d'un côté au diametre AB, comme K*k*, L*l*, M*m*, & de l'autre à la perpendiculaire GF, comme 1*r*, 2*r*, 3R, qui couperont le diametre AB aux points *r*, *r*, R, par où on menera des paralleles au diametre DE, qui couperont les paralleles à son conjugué AB aux points *x*, *y*, *z*, par lesquels on tracera avec une regle pliante le contour du quart de l'ellipse DB d'un côté, & pour avoir leurs correspondans à l'autre quart AD, on portera sur chacune des paralleles à AB les longueurs *ox*, *oy*, *oz* en *k*K, *l*L & OM, pour avoir la demi-ellipse ADB, & son opposé en dessous, s'il étoit nécessaire, où la partie renflée, qui est ici en haut, se trouveroit renversée en bas de E en B.

Fig. 72. *Démonstration.* A cause des paralleles au diametre AB, & des divisions des quarts de cercle proportionnelles à la grandeur de leurs rayons, de même que celles des lignes CF & CD, on aura CD : CO :: CG : CS, & CD : CP :: CG : CV : enfin CD : C*q* :: CG : C*u*; mais C*o* = R*z*, CP = *ry*, & C*q* = *rx*; & par la même raison R3 = CS, *r*2 = CV, & *r*1 = C*u* : donc R*z* : *ry* ::

R3

R3 : r2, c'est-à-dire que les ordonnées au diametre du cercle, & celles qui le sont au diametre de l'ellipse, sont en même raison entr'elles ; ce qui est une propriété de l'ellipse qu'il falloit décrire.

Le même problême se résout d'une différente façon qui fournit une maniere de *tracer l'ellipse sur des diametres conjugués par un mouvement continu.*

Soient les diametres AB, DE donnés de longueur & de position respective, c'est-à-dire faisant entr'eux un angle donné. Par l'extrêmité D on menera une perpendiculaire DP sur le diametre AB, & qu'on prolongera vers G pour y porter la longueur AC. *Fig. 73.*

Du point G ayant tiré au centre C la ligne GC, on prendra sur CD un point H à volonté ; d'où l'on tirera une parallele à PG, qui coupera CG au point I, & une autre indéfinie KL, parallele au diametre AB. Si du point I pour centre & pour rayon DG ou AC, on fait un arc de cercle qui coupe KH en K & L, je dis que les points K & L sont à la circonférence de l'ellipse ADBE ; ce qui est démonrré dans ma Stéréotomie, Livre II ; problême 8 ; d'où je tire la pratique annoncée de tracer l'ellipse sur des diametres conjugués, donnés par un mouvement continu.

On disposera deux regles, de maniere qu'elles fassent entr'elles un angle égal à l'angle trouvé par cette construction GCP, mettant une cheville en P & en G assez saillante pour pouvoir y appuyer les regles
Fig. 73. GC & CB; puis on mettra un crayon au trou D pour servir à tracer l'ellipse.

Si l'on fait mouvoir la regle GP en l'inclinant, & faisant couler la cheville G le long de la regle GC, & la cheville P le long de la regle CB, mobiles entr'elles sur le point C, comme les bras d'une fausse équerre, le crayon D tracera le quart d'ellipse DLB; & si on en fait de même de l'autre côté de la regle GC, transportant la regle, par exemple en FI, du côté de l'angle obtus DCA ou DCF, le point D du crayon tombera sur le point K, parce que la partie DC prend sa position en IK, partie de la longueur IF = GP, & tracera par son mouvement l'autre quart d'ellipse DKA, qui fera, avec le quart précédent, la demi-ellipse ADB; ce qui étoit proposé de faire organiquement par un mouvement continu, sans connoître ni les axes ni les foyers.

USAGE.

Ce problême est nécessaire pour tracer les *arcs rampans* & les projections de faces de berceaux elliptiques & en talud, dont

on ne donne ordinairement que les diametres conjugués : on peut cependant, si l'on veut, en trouver les axes par le problême suivant.

PROBLEME IV.

Les diametres conjugués étant donnés, trouver les axes.

Tout étant disposé, comme dans la figure du problême précédent, où A B & D E sont les diametres conjugués donnés, la ligne G P passant par D, perpendiculaire sur A B, & D G ayant été fait égal à C A, & la ligne G C tirée au centre C, on divisera cette ligne en deux également en m, par où & par le point D, ayant tiré l'indéfinie mg, sur laquelle on portera la longueur m G en mg. Si du point g on tire une indéfinie par le centre C, on aura la position du grand axe, dont on déterminera la longueur en portant de part & d'autre du centre C la somme de deux lignes Cm & mD, laquelle donnera les extrêmités X & x de ce grand axe. Fig. 74.

Présentement si on lui fait une perpendiculaire par le point C, & qu'on porte au dessus & au dessous la longueur Dg, on aura les points y & Y pour les extrêmités du petit axe yY, conjugué au grand xX. C. Q. F. F.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre, & pour rayon Cx, on décrira un quart de cercle Qx, & l'on menera par le point D, extrêmité d'un des diametres donnés, une ligne KO perpendiculaire à Cx, & par le même, Dn parallele à Cx, & nr parallele à DO.

Par la ſuppoſition, le point D eſt à la circonférence de l'ellipſe, puiſqu'il eſt à l'extrêmité d'un des diametres donnés; il faut démontrer que les points x & y ſont à la même circonférence.

Puiſque mG $=$ mC (*par la conſtruction*), mn ſera égal à mD, & nC $=$ Dg $=$ Cy (*conſtr.*); mais à cauſe des triangles ſemblables CKO, Cnr, on aura KO : DO $= nr$: : CK $=$ Cx $=$ CQ : Cn $=$ Dg $=$ Cy: donc les ordonnées au cercle KO : QC, ſont proportionnelles à celles de l'ellipſe DO & yC, propriété de l'ellipſe.

Donc les points x, y étant les extrêmités des deux perpendiculaires xX & yY ſont celles des deux axes conjugués de la même ellipſe, dont les lignes AB, DE ſont les diametres conjugués. C. Q. F. F.

De l'Ellipse considérée comme faite.

PROBLEME V.

Trouver, 1°. le centre, 2°. les diametres conjugués, 3°. les axes, 4°. les foyers d'une ellipse donnée ADBE.

Ayant tiré à volonté une ligne quelconque dans l'ellipse, terminée de part & d'autre à sa circonférence, comme *or*, on lui menera une parallele à une distance, prise à volonté, comme OR; on les divisera chacune en deux également en M & *m*, par lesquels on tirera la droite AB, qui sera un diametre. *Fig. 75.*

1°. Le milieu C de cette ligne sea le centre de l'ellipse.

2°. Si par ce milieu C on mene une parallele DE aux deux premieres *or*, elle sera un autre diametre, qu'on appelle *conjugué* au précédent AB.

3°. Ces deux diametres étant donnés, on trouvera les axes par le problême précédent.

4°. Par le problême 2, on trouvera les deux foyers; ce qui étoit proposé, & qui n'a pas besoin de démonstration particuliere, une partie étant tirée de ces définitions, & de ce que 1°. toutes les lignes qui passent par le centre sont des *diametres*.

2°. Que le point qui eſt au milieu de tous les diametres poſſibles eſt le *centre*.

3°. Que les lignes paralleles entr'elles, qui ſont coupées en deux également par un diametre qui les traverſe, ſont des *ordonnées* à ce diametre.

4°. Que la plus grande de toutes ces ordonnées, qui paſſe par le centre, eſt un diametre qu'on appelle *conjugué* au premier.

5°. Que les deux diametres inégaux, qui ſont perpendiculaires l'un à l'autre, s'appellent *grand* & *petit axe*.

6°. Que les points pris dans le grand axe à une certaine diſtance du centre, d'où les lignes tirées à un même point de la circonférence, font enſemble une longueur égale au grand axe, s'appellent *foyers*.

PROBLEME VI.

Par un point donné à la circonférence de l'ellipſe ou hors de l'ellipſe, lui tirer une tangente.

Fig. 76. Si le point étoit donné à l'extrêmité d'un diametre quelconque, & qu'on eût ſon conjugué ou une ordonnée, il n'y auroit qu'à lui mener une parallele par ce point, elle ſeroit tangente à l'ellipſe.

Si le point donné eſt à la circonférence, on peut réſoudre ce problême de deux façons.

Premiérement en cherchant les foyers, si l'on connoît les axes, comme nous l'avons dit au probl. 2.; & si on ne les connoît pas, on les cherchera par le problême précédent.

Soient ces foyers en F & f, & le point donné en D, on tirera les lignes FD, fD qui feront entr'elles l'angle FDf: si on le divise en deux également par la ligne Dm, & qu'on lui tire par D la perpendiculaire TN, cette ligne sera la tangente demandée TDN. Fig. 76.

Autrement soit d le point donné, ayant tiré du foyer F par ce point une ligne FG égale au grand axe, on tirera de l'autre foyer la ligne fG, qu'on divisera en deux également en H, la ligne tirée de H par d sera la tangente demandée.

2°. Si l'on n'a ni le grand axe ni les foyers, on menera par le centre C & le point donné D, le diametre DA, & un autre à volonté, comme BE: par une de ses extrêmités on menera BF parallele à DA, qui rencontrera la circonférence de l'ellipse en F, d'où l'on tirera FE, qui sera une ordonnée au diametre DA, à laquelle, si on tire par le point D une parallele Dt, cette ligne sera la tangente demandée. Fig. 76.

Si le point donné est hors de l'ellipse, comme en d, ayant mené par le centre C

la ligne dC & CG perpendiculaire à Cd, & égale à CI, interſection de la circonférence, & de la ligne Cd on tirera dG, à laquelle on menera la perpendiculaire GK qui coupera dC prolongée en K, on portera la longueur CK en CL ſur la ligne Cd, enſuite on menera une ordonnée quelconque au diametre IM, en faiſant à volonté une parallele No à ce diametre, qu'on diviſera en deux également en p, par où on tirera pC, à laquelle on fera une parallele Lt, qui coupera la circonférence en t, où ſera le point d'attouchement d'une ligne dt, qui ſera la tangente demandée. Si l'on prolonge tL en T, le point T ſera celui de l'attouchement de la ligne dT du côté oppoſé.

Démonſtration pour la premiere ſolution.

Il eſt démontré dans les ſections coniques, que les angles FDT, fDN ſont égaux entr'eux, ſi l'on ajoute de part & d'autre les angles FDm, fDm égaux par la conſtruction, les angles mDT, mDN le feront auſſi, & par conſéquent droits : donc TN ſera tangente de l'ellipſe au point D. C. Q. F. F.

Pour la ſeconde ſolution, à cauſe des paralleles BF & DA, on aura EC : CB :: ES : SF ; mais EC, demi-diametre, eſt

égal à CB : donc ES = SF, & par conséquent EF est une ordonnée au diametre DA, à laquelle DT étant parallele (par la construction) est une tangente qu'il falloit tracer.

Pour la troisieme solution, on voit par la construction de l'angle droit *d*GK : que CG étant égal à CI, & perpendiculaire à *d*C, la ligne CK est une troisieme proportionnelle aux distances C*d*, CI, laquelle CK ayant été portée en CL, on aura C*d* : CI :: CI : CL ; ce qui est une propriété des soutangentes, comme il est démontré dans les traités des sections coniques, non seulement pour l'ellipse, mais encore pour l'hyperbole.

USAGE.

Cette proposition, qui ne paroît d'abord qu'une pure curiosité, est une des plus nécessaires dans la pratique de l'architecture & de la coupe des pierres, où il s'agit de voûtes ou de contours de plans elliptiques, parce que, pour faire les joints des voûtes de cette espece, suivant la grande regle, qui veut qu'on fasse les arêtes des pierres de force égale de part & d'autre du joint, il faut faire la même opération que pour trouver les tangentes, qui doivent en effet être perpendiculaires à ces joints, & réci-

proquement; de ſorte qu'ayant tracé une tangente à un point donné d'une courbe quelconque, il ne s'agit plus que de lui mener une ligne perpendiculaire par ce point, de quelque eſpece que ſoit cette courbe, elliptique, parabolique, hyperbolique, cycloïde, &c. pour déterminer géométriquement la poſition du joint entre deux vouſſoirs.

Cette propoſition ſert de plus à joindre une portion d'ellipſe à une ligne droite, de maniere qu'à cette jonction il ne ſe forme point de *jarret*, mais une tranſition inſenſible de l'une de ces lignes à l'autre; ce qui eſt d'uſage en pluſieurs circonſtances de deſſeins d'architecture, ſurtout ſuivant la mode de ce tems, où les ſallons, veſtibules, & autres pieces d'appartemens, ſont arrondis de différentes courbes circulaires & elliptiques, tournées en ſens contraire du concave au convexe, qu'on ne peut joindre ſans jarrets, qu'en les aſſemblant à l'attouchement d'une tangente commune au dedans & au dehors.

66

68

71

73

74

76

SECTION III.

De la description de la Parabole.

PROBLEME I.

L'axe d'une parabole & un point à sa circonférence étant donnés, la décrire par plusieurs points, ou par un mouvement continu.

Soit S4 l'axe de la parabole à tracer, & le point D ou *d* donné à sa circonférence, on en demande tant qu'il sera nécessaire pour en déterminer le contour. *Fig. 77.*

Ayant tiré du sommet S de l'axe au point donné D une ligne SD, on lui fera une perpendiculaire D4 qui coupera l'axe au point 4, & du même point D une autre perpendiculaire DO à l'axe S4, la longueur O4 doit être considérée comme une ligne de remarque, qu'on appelle le *parametre*. On la divisera en quatre parties égales, dont on en portera une au dessous du sommet S de l'axe en F, pour déterminer le point appellé le *foyer*, & une autre en dessus sur l'axe prolongé au point R, par lequel doit passer une ligne AB perpendiculaire à l'axe, qn'on appelle la *directrice*.

Cette préparation étant faite, on tirera à volonté autant de perpendiculaires à l'axe qu'on voudra avoir de points à la circonfé-

rence de la parabole de part & d'autre de l'axe, comme xy, XY, dD qui couperont cet axe aux points O, M, m, n. Si l'on prend les intervalles Ro, RM, Rn pour rayons, & le point F pour centre, commun des arcs yi, yi, &c. qui couperont les paralleles xy, XY, dD aux points x & y, X & Y, d & D, tous ces points seront à la circonférence de la parabole demandée, secondement par un mouvement continu.

Ayant tiré cette perpendiculaire à l'axe par le point R, qu'on appelle la *directrice*, parce qu'elle sert à diriger l'instrument, qui n'est autre chose qu'une équerre ordinaire EQU,

On posera une regle sur la directrice AB, à laquelle on appliquera une des branches de l'équerre qu'on fera couler le long de cette regle, après avoir attaché au bout E de cette équerre le bout d'un cordeau égal à la distance OR, & l'autre fixé au foyer F; alors ayant posé cette branche de l'équerre EQ sur l'axe SO, on appuyera le cordeau contre cette branche avec une pointe de clou mobile, ou un crayon pour tracer la courbe, & l'on reculera doucement l'équerre le long de la ligne RA pour un côté, en l'écartant de l'axe, l'autre branche coulant toujours le long de

la regle ; le crayon mis & tenu dans le pli mobile du cordeau F P E, tracera par ſon mouvement la ligne courbe S P D d'un côté de l'axe, & S*yd* de l'autre, en retournant l'équerre ſur le côté R B de la directrice ; cette courbe eſt la parabole demandée.

La démonſtration de cette conſtruction dépend des principes des ſections coniques, ſur leſquels il ne nous convient pas ici de nous arrêter, pour le peu d'uſage que nous avons à faire de cette courbe, d'autant plus qu'elle eſt connue de tous ceux qui ont les premiers élémens des ces Sections.

USAGE.

On trouve rarement occaſion de décrire la parabole dans la coupe des pierres : elle ne ſert qu'à tracer les arcs de face des *trompes* quarrées pardevant dans un angle droit. L'axe, qui eſt la ligne du milieu, de niveau à l'impoſte eſt donné, & la rencontre du milieu de la trompe avec l'à-plomb au bout de cette ligne, eſt le point donné au contour de la parabole.

Cette courbe peut auſſi être employée à tracer un arc rampant dans certaines circonſtances, où les pieds droits ſont en ſurplomb ; ce qui arrive très-rarement : au cas qu'on en faſſe uſage, il eſt néceſſaire

de sçavoir donner aux joints de tête des faces l'inclinaison qu'ils doivent avoir pour être réguliers ; ce qui dépend du problême suivant.

PROBLEME II.

Par un point donné à la circonférence d'une parabole, lui tirer une tangente.

Le foyer F étant connu par le problême précédent, on tirera au point donné D la ligne F D qu'on prolongera vers E, ensuite on menera par le point D une parallele G H à l'axe S O, laquelle fera avec la précédente F E l'angle E D G, qu'on divisera en deux également par une ligne D M, qui sera la direction d'un joint de tête d'appareil, parce que la ligne qui lui sera perpendiculaire par le point D, sera la tangente de la parabole, comme il est démontré dans tous les traités des sections coniques, même les plus anciens, comme *Appollonius*, Livre I, page 33.

Nous avons indiqué l'usage de ce problême en même tems que nous en avons donné la construction.

Il peut encore servir à la jonction d'une partie de cette courbe avec une ligne droite ou une autre courbe, dont on a aussi la tangente, comme nous l'avons dit à l'égard de l'ellipse.

SECTION IV.

De la description de l'Hyperbole.

PROBLEME I.

Les deux axes & un point à la circonférence étant donnés, tracer l'hyperbole par plusieurs points, ou par un mouvement continu.

Soit ANB la section triangulaire par l'axe d'un cône donné, à laquelle on suppose un autre plan qui la coupe perpendiculairement au premier, & parallélement à l'axe. Il en résultera une figure d'hyperbole, dont on a trois points donnés, sçavoir le sommet S, & deux extrêmités d'ordonnées à l'axe, qui seront les mêmes que celles du cercle de la base du cône A*o*B, par lesquelles passe le plan coupant; telle est R*d* dans le demi-cercle A*d*B. *Fig.* 72.

Mais ce n'est pas assez de trois points pour déterminer une section conique, il en faut cinq pour toute autre que le cercle: or nous aurons ici d'autres données, en prolongeant les lignes RS & BN, jusqu'à ce qu'elles concourent en Q; alors on a la longueur SQ pour le premier axe, dont le milieu C est le centre de l'hyperbole, & la distance CN dans la supposition de la section parallele à la prolongation du grand

axe, sera la moitié du second axe, par le moyen duquel on trouve facilement les foyers comme il suit.

On tirera S*g* parallele à CN, qui coupera NX parallele à l'axe au point *g*; si l'on prend la longueur de la diagonale C*g*, & qu'on la porte sur l'axe en CF, on aura le point F pour un des foyers; puis en portant la même distance au dessus de C en *f*, on aura le second foyer *f*. Si enfin on prolonge la diagonale C*g* vers *t* d'un côté, & CG vers T de l'autre, on aura ces lignes, qu'on appelle *asymptotes*; alors on a tout ce qui est nécessaire pour décrire l'hyperbole par plusieurs points, ou par un mouvement continu, comme on va le dire.

Premierement par plusieurs points.

D'une ouverture de compas, prise à volonté, pourvu qu'elle soit plus grande que *fs* pour rayon, & du point *f* pour centre, on tracera un arc en E*e*, on portera le même intervalle de Q en *o* sur l'axe prolongé, & l'on prendra la différence *os* de cet intervalle & du premier axe Q*s*, de laquelle différence pour rayon, & du foyer F pour centre, on décrira un arc qui coupera le précédent E*e* au point *h*, lequel sera à la circonférence de l'hyperbole.

Fig. 78.

On cherchera de même autant de points que l'on voudra de cette courbe.

Seconde

Seconde maniere par un mouvement continu.

Ayant pris une regle fK qui excede la plus grande distance du foyer au point donné D le plus éloigné, on la percera d'un trou au point f pour y passer un clou arrondi ou une cheville, autour de laquelle elle puisse tourner. On portera sur cette regle la longueur Qs du premier axe de f en P : ensuite on prendra un cordeau de la longueur P D, dont on attachera un bout à l'autre foyer F; puis posant la regle fK sur fO, on tendra le cordeau, qui est lâche, en le tirant par un pli de F en S, le long de la regle, & en l'écartant par le bout K; l'autre bout restant fixe en f, on appuyera sur le pli du cordeau avec une pointe de clou ou un crayon contre la regle, en la faisant tourner vers D, & l'on tracera ainsi l'hyperbole à peu près comme on a fait pour la parabole. *Fig.* 78.

Il est clair que cette description organique est la même que la précédente par plusieurs points, pour peu qu'on y fasse attention. *Descartes* dans sa Géométrie établit cette génération de l'hyperbole, aussi bien que les précédentes de l'ellipse & de la parabole, pour servir de base à tous les raisonnemens géométriques des propriétés qu'il en déduit.

Fig. 78. Lorſqu'on connoît les lignes CT & Ct, qu'on appelle *aſymptotes*, tirées par le centre C & les points G & g, éloignés du ſommet S de l'intervalle de la moitié CN du ſecond axe nN, on peut, avec la ſeule poſition d'un point à la circonférence de la courbe, en trouver autant qu'on voudra.

Soit donné, par exemple, le point D, on tirera par ce point & d'une direction, priſe à volonté, une droite, par exemple IV, qui coupe les deux aſymptotes en V & I, on portera l'intervalle DV de I en x ſur cette ligne ; le point x ſera à la circonférence de l'hyperbole. Si du même point x on tire une autre ligne avec la même condition, comme Ll, qui coupera les aſymptotes en L & l, on portera la longueur xL en ly, le point y ſera un troiſieme point de cette courbe, ainſi du reſte.

Cette propriété démontre un paradoxe, que les aſymptotes approchent toujours de l'hyperbole, & ne peuvent jamais la rencontrer.

A l'imitation de cette conſtruction, on peut décrire une ellipſe aſymptotique à un autre au dedans ou au dehors par un ſeul point donné.

fig 79. — Soit, par exemple, une ellipſe ABDE, autour de laquelle on en doit décrire une autre par un ſeul point p donné.

Ayant tiré à volonté la ligne indéfinie PD qui coupera l'ellipse donnée aux points B & D, on portera la longueur PB en Dx, le point x sera un de ceux de l'ellipse demandée du point x; on tirera aussi à volonté l'indéfinie xA, qui coupera l'ellipse en F & A, on portera xF en Ay, le point y sera le troisieme, puis yE donnera de même le point H, & ainsi de suite.

REMARQUE.

Pour rendre ces élémens plus adaptés à la pratique, nous avons considéré l'hyperbole dans le cône, ce qui abrege aussi beaucoup les données nécessaires pour la décrire.

Quoique M. *la Rue* ait avancé dans *sa pratique de la coupe des pierres*, que l'étude des sections coniques y étoit inutile, nous n'en avons pas jugé de même. On ne peut nier que la connoissance des propriétés de l'ellipse ne soit essentielle dans cet Art, où cette courbe est sans contredit la plus usuelle. Je conviens que la parabole & l'hyperbole y sont plus rares; mais nous venons de montrer que la parabole n'y est pas totalement inutile pour les trompes.

Nous pouvons compter plusieurs cas où l'on rencontre des hyperboles: tels sont les suivans.

1°. Pour faire l'épure de la porte en tour

ronde & en talud, ſuivant notre méthode, qui eſt fort naturelle; 2°. pour faire l'épure de la trompe conique à trois pans; 3°. pour la trompe en tour ronde, érigée ſur une ligne droite; 4°. pour les joints de la corne de vache; 5°. pour les naiſſances des arriere-vouſſures bombées; 6°. pour la nouvelle arriere-vouſſure de Marſeille; 7°. pour les lunettes ébraſées dans une voûte ſphérique; 8°. pour les arcs rampans, dont les pieds droits ſont en ſurplomb dans certains cas; 9°. pour les joints montans des arrondiſſemens coniques; 10°. pour la ſolution du problême qui donne la maniere de tirer les joints de tête des arcs elliptiques & hyperboliques par des points donnés hors du contour de ces courbes: 11°. enfin on peut employer cette courbe à la diminution des colonnes, au lieu de la conchoïde de *Nicomede*, ainſi que l'a enſeigné M. *Blondel* de l'Académie des Sciences. Je ſçais que les Artiſtes ſe paſſent de toutes ces préciſions géométriques, mais ils n'en font pas mieux, & c'eſt delà que viennent les petites fautes qu'ils remarquent dans la pratique ſans en deviner la cauſe. D'ailleurs nous ſommes dans un ſiecle où les Architectes bien élevés étudient tous la Géométrie, & ſont capables de juger de la théorie des Arts relatifs à leur état.

PROBLEME II.

Par un point donné à la circonférence d'une hyperbole, lui mener une tangente.

Cette ſolution eſt la même que celle que nous avons donnée pour tirer une tangente à l'ellipſe par des points donnés.

Il ne s'agit que de connoître les foyers, & de tirer de chacun d'eux une ligne FD, *f*D prolongée en dehors à volonté, & diviſer l'angle RDK qu'elles font entr'elles en deux également par la ligne *m*D, à laquelle, ſi on fait par le point D une perpendiculaire D*n*, *m*D ſera la tangente demandée, & cette ligne *n*D ſera la perpendiculaire à l'arc de l'hyperbole, par conſéquent celle qui doit déterminer la direction d'un joint de tête entre deux vouſſoirs, parce qu'elle fait les arêtes des pierres égales de droite & de gauche, à quoi cette opération nous ſert uniquement. Fig. 71.

La démonſtration de cette opération eſt la même que celle que nous avons donnée ci-devant pour l'ellipſe; ces deux courbes ſe reſſemblent en beaucoup de choſes; ce qui fait dire aux Géometres que l'hyperbole eſt une ellipſe renverſée, dont les foyers ſont au dehors du grand axe, comme ſi l'on avoit coupé une ellipſe en tra-

vers, & qu'on eût tourné les convexités dos à dos.

S'il s'agiſſoit de tirer un joint par un point donné au dehors, ce qui eſt un cas très-rare, on aura recours aux problêmes que j'en ai donné au Livre II de ma Stéréotomie; nous ne nous arrêtons ici qu'à ce qui eſt néceſſaire pour la pratique ordinaire.

CHAPITRE II.

De la deſcription des Arcs rampans.

SECTION I.

Les termes de rampe & de rampans ſont uſités en architecture, pour ſignifier la poſition d'un corps, d'un arc, & même d'une ligne qui n'eſt ſituée ni horizontalement ni verticalement, ou (comme l'on dit) ni de niveau, ni à plomb. Ainſi une arcade ou une voûte, dont les naiſſances ne ſont pas de niveau, comme elles doivent être ordinairement, eſt appellée *rampante*; & comme les ceintres de ces arcs, de quelque nature de courbe qu'ils ſoient, ne doivent point faire de jarret à leur jonction avec les lignes droites de leurs ſupports, qu'on appelle *pieds droits*, il eſt de l'eſſence que cette

jonction se fasse au point d'attouchement de la courbe avec sa tangente, soit que les pieds droits soient verticaux ou à plomb, soit qu'ils soient en talud ou en surplomb, ce qui constitue différens cas.

PROBLEME I.

Comme les courbes usitées sont celles des sections coniques, il s'agit de faire une portion de section conique, tangente à deux lignes droites, paralleles ou inclinées entr'elles, sur un diametre ou une corde inclinée à l'horizon, passant par les points d'attouchement.

Outre ces deux lignes droites tangentes aux naissances, on en considere encore une troisieme qui touche le sommet de la courbe, qu'on appelle pour cette raison *ligne de sommité*, dont la position est variable, suivant les occurrences.

Ces trois lignes étant données de position les unes à l'égard des autres, il sera facile de reconnoître quelle est la section conique qui doit satisfaire au problême.

Lorsque les pieds droits sont paralleles entr'eux, ou inclinés en talud, il est clair que la courbe convenable pour un arc rampant ne peut être qu'une portion de cercle ou d'ellipse, parce qu'il n'y a que ces deux sections coniques qui rentrent en

elles-mêmes; mais lorſqu'ils ſont inclinés en ſurplomb, la parabole & l'hyperbole peuvent auſſi y convenir: ces cas ſont fort rares dans l'architecture moderne, où l'on ne fait plus, comme dans la gothique, des arcs-boutans extérieurs aux édifices voûtés; on y ſupplée par des contre-forts de décoration, comme des grouppes de colonnes iſolées, ou des conſoles renverſées. Cependant il eſt à propos de faire mention de ces cas pour la perfection de la doctrine.

Lorſqu'on n'eſt point gêné pour la hauteur de l'arc, il eſt très-facile de raccorder la jonction de la courbe avec les pieds droits qui doivent la toucher aux deux points de naiſſance donnés de poſition; mais lorſque la ligne de ſommité eſt donnée, le problême devient plus compoſé, parce qu'alors l'arc rampant eſt borné par quatre lignes, ſçavoir celle de *rampe*, qui eſt l'inclinée, paſſant d'un point d'attouchement des pieds droits à l'autre, laquelle eſt une corde ou un diametre; les deux pieds droits qui ſont des tangentes, prolongées juſqu'à la ligne de ſommité; enfin cette derniere ligne, qui en détermine la hauteur, & qui eſt une tangente de niveau ou rampante, comme le cas l'exige, ſuivant la poſition de l'ouvrage qu'on ſe propoſe de faire, comme ſous un eſcalier, ou ſous un palier.

1°. Si ces quatre lignes ſont paralleles entr'elles, comme RS & OP, SO & RP, il eſt clair que la courbe rampante ſera un demi-cercle ou une demi-ellipſe, puiſque ce ſont les ſeules ſections coniques qui puiſſent avoir deux tangentes paralleles ; la courbe dans ce cas ne peut être un demi-cercle que quand ces quatre lignes formeront enſemble un parallélogramme rectangle, dont la hauteur (qui eſt la partie des pieds droits compriſe entre les lignes de rampe & de ſommité) ſera égale à la moitié de la baſe, qui eſt la ligne de rampe ; dans tout autre cas la courbe ſera une demi-ellipſe, dont la ligne de rampe RP ſera un diametre, & CT = OP la moitié de ſon conjugué. *Fig.* 80.

2°. Les mêmes courbes ſerviront auſſi, quoique la ligne de ſommité ne ſoit pas parallele à la ligne de rampe, pourvu que les pieds droits ſoient paralleles entr'eux. *Fig.* 81.

3°. Si les pieds droits ſont en talud, la courbe ſera un arc de cercle ou d'ellipſe moindre qu'une demi-circonférence.

4°. Si les pieds droits ſont en ſurplomb, les quatre ſections coniques pourront avoir lieu.

Dans ce dernier cas, ſi la ligne de ſommité eſt parallele à la ligne de rampe, on a un moyen facile de connoître quelle eſt

celle des sections coniques qui convient au cas proposé.

Ayant divisé la ligne de rampe RP en deux également M, on tirera du point M au point de concours X des deux pieds droits la ligne MX : si la ligne de sommité
Fig. 82. passe par le milieu B de cette droite, la courbe demandée sera une parabole ; si elle
Fig. 83. la rencontre au dessus, comme en E, ce sera une hyperbole ; & enfin une ellipse, si
Fig. 84. elle la coupe au dessous, comme en L.

-fig 88. Par une semblable méthode, on reconnoîtra toutes ces courbes, en divisant les angles que font entr'elles les prolongations des pieds droits avec la ligne de sommité SO : car si l'on tire des lignes aux trois points d'attouchemens donnés RTP, & qu'ayant divisé ces lignes en deux également en *m* & *n*, on tire par les points S & O des lignes *sm*, *on*, il arrivera 1°. ou qu'elles seront paralleles, comme à la figure 82, & alors la section conique qui y convient est une parabole ; 2°. si elles concourent en dedans vers un point C, comme à la fig. 84, ce sera une ellipse. Si au contraire elles concourent en dehors, fig. 83, ce sera une hyperbole.

Ces connoissances préliminaires étant supposées, l'énoncé du problême se réduit à celui-ci : *Etant données, trois lignes incli-*

nées entr'elles qui doivent toucher une ſection conique, dont on a les deux points extrêmes des attouchemens, trouver le moyen, ou en termes d'architecture, la direction des pieds droits d'un arc rampant, la ligne de rampe & celle de ſommité étant données, trouver le point d'attouchement de cette derniere.

Soient les pieds droits SR, OP, la ligne de rampe RP, & la ligne de ſommité SO données.

1°. Si les pieds droits ſont à-plomb, par conſéquent paralleles entr'eux, & la ligne de ſommité SO parallele à celle de rampe RP, le point d'attouchement doit être au milieu T de la ligne de ſommité SO, parce que l'arc ſera une demi-ellipſe, dont RP eſt un diametre, & CT la moitié de ſon conjugué. *Fig. 80.*

2°. Si les pieds droits étant paralleles entr'eux, les lignes de rampe & de ſommité ne le ſont pas, ayant prolongé le pied droit OP en E d'une longueur égale à OP, on tirera la ligne RE, qui coupera SO en T, où eſt le point d'attouchement demandé. *Fig. 85.*

2°. Si les pieds droits ne ſont pas paralleles entr'eux, on menera par le point S une ligne SD parallele à BO, direction du pied droit oppoſé, laquelle prolongée, coupera la ligne de rampe RP au point D; *Fig. 86.*

on portera la longueur D S sur son prolongement en E, d'où l'on tirera ER, qui coupera la ligne de sommité au point d'attouchement demandé en T, quelle que soit la section conique qui satisfait au problême.

La démonstration de cette pratique dépend de plusieurs propositions des propriétés des sections coniques que nous ne pouvons rappeller, mais principalement de celle qui dit que si deux tangentes à une section conique se rencontrent, & qu'elles soient coupées par d'autres lignes menées par les points d'attouchement, elles sont coupées en *raison harmonique*, c'est-à-dire que la premiere partie sera à la troisieme, comme la différence de la premiere & de la seconde est à la différence de la seconde & de la troisieme, VO : VS :: OT : ST; ce qui est démontré dans tous les Traités des Sections coniques.

Cette vérité étant supposée, on démontrera que le point T, trouvé par notre construction, est celui de l'attouchement : car on a trois points donnés de la division harmonique, sçavoir *o*, *s* & V; reste à trouver le quatrieme T.

A cause des triangles semblables VOR, VSD, on aura VO : VS :: OR : SD = SE; & à cause des triangles semblables ORT, SET, on aura OR : SE :: OT : ST; donc

par égalité, on aura VO:VS::OT:ST. C. Q. F. D.

PROBLEME II.

Les points d'attouchemens des lignes de sommité étant donnés, tracer les sections quelconques des arcs rampans par plusieurs points.

1°. Pour la parabole, ayant divisé RP en deux également en M, on tirera du point M au point X la ligne MX, qui coupera SO en T, on lui menera les paralleles PQ, RV; on divisera ensuite les lignes PQ, VR, TX en un même nombre de parties égales, par exemple en quatre aux points 1, 2, 3, puis des points P & R, on tirera aux points de divisions de la ligne XT des droites P1, P2, P3; & du point T aux points de divisions des lignes PQ, VR, on tirera des droites T1, T2, T3 qui croiseront les premieres; les points de sections x, y, z des lignes correspondantes, c'est-à-dire partant des mêmes chiffres, seront autant de points de la parabole. *Fig. 87.*

Seconde solution pour le cas de l'ellipse & de l'hyperbole en arc rampant.

Les points d'attouchemens R, T, P étant donnés, on tirera les lignes RT, PT, que l'on divisera en deux également en m & n, *Fig. 88, 89.*

par où & par les points S & O, on menera les lignes *ms*, *no*, lesquelles étant prolongées en dedans pour l'ellipse, se couperont
Fig. 88. au point C, où sera le centre, & pour l'hy-
Fig. 89. perbole au point *c*, qui sera aussi le centre, c'est-à-dire le milieu du premier axe, par le moyen duquel on a déja un diametre T*t*, en portant CT de C en *t* sur la ligne TC prolongée. Ainsi la question sera réduite à celle-ci.

Un diametre de l'ellipse ou de l'hyperbole, & une ordonnée à ce diametre étant donnés, trouver le parametre & autant de points que l'on voudra au contour de la section.

Soit T*t* le diametre donné, & l'ordonnée PM parallele à la tangente SO, par les points *t* & P, ayant tiré la ligne *t*PV, fig. 88, & PV*t*, fig. 89, qui coupera la ligne SO prolongée en V, on portera TV de T en E sur le diametre *t*T prolongé, s'il le faut, comme dans l'ellipse, puis on menera E3 parallele à SO, & 3G parallele à ET; alors on divisera les longueurs 3G & TV en un même nombre de parties égales; par les points de divisions de la ligne 3G, & par le point T, on menera des droites indéfinies; puis par les points de divisions de la ligne TV, & par le point *t*, on menera d'autres droites qui couperont les pre-

miers; les points de ſections x, y des lignes correſpondantes ſont autant de points de la courbe.

Pour avoir l'autre moitié de l'ellipſe, il n'y aura qu'à mener des paralleles par les points x, y à la tangente de ſommité SO qui couperont le demi-diametre CT en r, au-delà duquel on portera les longueurs rx, ry, pour avoir des points correſpondans 4 & 5; alors on aura à la circonférence ſept points, ſçavoir R, 5, 4, T, x, y, P, par leſquels on tracera avec une regle pliante le contour de l'arc rampant : il eſt viſible qu'on peut augmenter le nombre de ces points tant qu'on voudra, en partageant G3 & TV en un plus grand nombre de parties égales.

Cette même conſtruction s'applique auſſi à l'hyperbole, comme on le voit à la fig. 89.

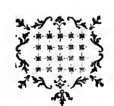
Nous ne pouvons pas en démontrer ici tout au long la juſteſſe, parce qu'il faudroit avoir poſé des principes que nous n'avons pas dû inſérer ici; il ſuffira de les indiquer.

Il eſt démontré dans les Traités des Sections coniques, que la corde qui paſſe par des points d'attouchemens de deux tangentes qui concourent, étant diviſée en deux également, ſi l'on tire par le milieu au point de concours une ligne droite, elle paſſera par le centre de la ſection, ſi elle en

a un, comme l'ellipſe & l'hyperbole; & ſi elle n'en a point, elle ſera parallele à l'axe, comme dans la parabole; ce qui fait connoître la nature de la ſection conique, qui ſe préſente comme nous l'avons dit.

Le centre étant connu, & le point d'attouchement T de la ligne de ſommité, il eſt clair que l'on connoît le demi-diametre, & par conſéquent le diametre qui en eſt le double, & les deux ordonnées à ce diametre, menées parallélement à la tangente de ſommité, par les points donnés R & P à la circonférence.

Par le moyen du diametre T*t*, & d'une ordonnée au diametre, nous avons trouvé le parametre, qui eſt le même pour toutes les ordonnées, étant une troiſieme proportionnelle aux deux diametres, comme nous l'avons dit dans notre Stéréotomie, Liv. II, page 161.



CHAP. III.

79. 78. 86. 84 85. 88. 89.

CHAPITRE III.

De la deſcription de quelques courbes uſuelles en architecture qui ne ſont pas des ſections coniques.

§.

De la Spirale.

NOUS rangeons la ſpirale à la ſuite des *arcs rampans*, parce que ſes parties priſes ſéparément dans une révolution, peuvent très-bien ſervir au même uſage : car ſi l'on ſuppoſe la ſpirale ABC traverſée par une ligne de rampe AB, la partie ADB eſt un arc rampant, tel qu'il convient, ſoit que les pieds droits ſoient paralleles, ſoit qu'ils ſoient inclinés en talud ou en ſurplomb, ne s'agiſſant que d'élever ou de baiſſer cette ligne de rampe, pour que les points A & P ſoient touchés par les pieds droits ſans jarret.

Il n'y a pas de ligne courbe réguliere plus ſuſceptible de variations que la ſpirale. M. de *Varignon* en a fait voir une infinité dans un Mémoire inſéré dans ceux de l'Académie des ſciences en 1704 ; il nous ſuffira d'en décrire de deux ou trois eſpeces relatives à l'uſage qu'on en peut faire dans

dans certains ouvrages d'architecture.

SECTION I.

Premieree spece. De la spirale d'Archimede, qui est la plus simple & la plus uniforme de toutes.

fig. 90.

D'un point C pour centre, & AC pour rayon, pris à volonté, ayant décrit un cercle destiné à renfermer une révolution entiere de la spirale, on en divisera la circonférence en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points à celle de la spirale proposée, par exemple en douze; ce qui peut se faire géométriquement, en portant six fois le rayon, & sous-divisant chaque partie en deux : on tirera par ces divisions autant de rayons sur lesquels on portera successivement, premiérement un rayon du cercle entier, que l'on divisera en même nombre de parties qu'on a divisé la circonférence, par exemple en douze, en diminuant la longueur du rayon primitif d'une partie à chaque rayon suivant autour du centre C, auquel ce rayon sera réduit à rien, comme il est visible par la fig. 90, & l'on fera passer une ligne courbe à la main, ou avec une regle pliante, par le bout de chacun de ces rayons, qui sera la spirale proposée pour une seule révolu-

tion. Si l'on veut en faire deux ou plus, complettes ou incomplettes, il faut prolonger les rayons au-delà du premier cercle de révolutions, & augmenter leur longueur d'une partie à chacun ; ce qui est facile à comprendre : alors la courbe s'élargira en circonférence autant que l'on voudra.

Si dès le commencement on s'étoit déterminé à une révolution & demie, on auroit divisé le plus grand rayon donné en dix-huit parties, ainsi du plus ou moins ; ce qui est trop sensible pour s'y arrêter.

Le cercle qui enferme la premiere révolution, s'appelle *cercle de circonscription ;* celui qui est au dehors ou au dedans du point A, s'appelle *cercle de révolution*, & les arcs de ce dernier, *arcs de révolution*.

REMARQUE.

Si après avoir tracé une spirale de droite à gauche, on en trace une autre en sens contraire de gauche à droite, il se forme par leur rencontre un contour semblable à celui d'un cœur, comme on voit à la fig. 90, laquelle étoit souvent employée dans les ornemens contournés des vitraux gothiques.

PROBLEME I.

Alonger, raccourcir, arrondir, ou applatir le contour d'une ſpirale en telle raiſon que l'on voudra, & la varier infiniment, ſi l'on veut.

Premiérement on peut varier les rayons des arcs de révolutions dans le rapport des ordonnées de telles courbes que l'on voudra choiſir, & les arcs de révolution dans de pareils rapports; ce qui rend ce problême très-général.

En ſecond lieu, ſans varier les arcs, les faiſant toujours égaux en nombre de degrés, varier les rayons comme les racines des puiſſances quelconques, quarrées, cubes, &c, ou comme les tangentes, ſécantes, &c. Les Architectes y emploient les tangentes ou leurs différences pour tracer leur volute ionique.

Troiſiémement, changer la poſition de la courbe génératrice à l'égard de l'axe de la ſpirale, comme ſi, au lieu de placer les deux axes ſur une même ligne, en donnant à la ſpirale & à la courbe génératrice un centre différent, ce que M. de *Varignon* appelloit *vertico-centrale*, on place l'axe de la ſpirale, & le centre ſur celui de la génératrice; ce qu'il appelle *co-centrale.*

Comme l'on a ſouvent beſoin d'une ſpi-

rale intérieure ou extérieure, qui en accompagne une autre, pour déterminer les différentes largeurs de la côte d'une volute qui doit s'élargir insensiblement depuis le centre, ou un cercle circonscrit au centre, qu'on appelle l'*œil de la volute*, il faut avoir une méthode sûre de cette *compagne*.

La premiere spirale ABC étant tracée, & un point D donné sur son axe AC pour la plus grande largeur AD de la côte de volute à faire, on tracera à part un triangle rectangle *a*, *c*. 12 isoscele, dont les côtés soient égaux à l'axe AC; sur *a*. 12, on prendra un point *d*, de maniere que *ad* égale CD dans la premiere figure, & l'on tirera *dc*: puis ayant divisé *c*. 12 en douze parties égales à celles de EC de la premiere figure, on tirera autant de paralleles à *a*. 12 qui couperont C*d* aux points *s*, *t*, *u*, *x*, *y*, *z* les parties 11.*z*.10.*y*, &c. de ces paralleles, comprises entre *c*.12 & *cd*, seront les rayons de la spirale, compagne de la premiere: ainsi on portera la longueur 11.*z* sur le rayon C1 de circonvolution 10.*y* sur C2, 9*x* sur C3, & ainsi de suite jusqu'au centre C, pour avoir la spirale demandée D*xy*C qui tend au même centre C que la premiere ABC, s'approchant proportionnellement.

Fig. 90.

Fig. 91.

Si l'on vouloit qu'elle en approchât inégalement, on pourroit, au lieu d'une ligne

droite Cyd, faire un arc de cercle ou de toute autre courbe.

§. *Autres especes de spirales de différens contours, qu'on peut appeller circulaires elliptiques, paraboliques, &c.*

Si, au lieu de suivre la progression arithmétique dans la détermination des longueurs des rayons, comme dans la spirale de la figure précédente, à laquelle on donne le nom d'*Archimede*, on suit le rapport des ordonnées dans le cercle, l'ellipse, la parabole ou l'hyperbole, ou toute autre courbe, on pourra appeller ces spirales du nom de leurs génératrices, circulaires, elliptiques, paraboliques, &c; nous allons en donner un exemple tiré du cercle.

Soit une ligne A X prise à volonté pour l'axe d'une spirale, dont on veut que les longueurs des rayons soient dans le rapport des ordonnées au diametre d'un cercle.

Fig. 92. Ayant pris A C pour le plus grand rayon de la spirale, & le point C pour son centre, on décrira un cercle d'un rayon pris à volonté, dont on divisera la circonférence, comme nous avons fait ci-devant, par exemple en douze parties égales, ou plus, si l'on veut, & l'on tirera des diametres par ce point de division; ensuite du point A pour centre, & de l'intervalle A C pour rayon,

on décrira un quart de cercle, ou, si l'on vouloit, un quart d'ellipse, ou une demi-parabole ou hyperbole: nous nous en tenons ici au quart de cercle pour ligne génératrice.

On se déterminera ensuite à la quantité de révolutions qu'on voudra que la spirale fasse autour de son centre C; nous n'en supposerons ici qu'une & demie pour exemple, auquel cas on divisera le rayon RA du quart de cercle générateur en trois parties égales, dont deux exprimeront la premiere révolution en RD, que l'on divisera en autant de parties égales que l'on a divisé le cercle de circonvolution A3X*d*, comme ici en 12; & par chacune de ces divisions, on tirera des paralleles jusqu'au rayon *d*C, qui couperont la circonférence du quart de cercle RC aux points 1,2,3,6, 9, 12, &c, & le rayon C*d* aux points *d*,*e*,*n*, *v*,*r*, &c, les longueurs R*d*, 3*e*, 6*n*, 9*u*, 12*r* seront celles des rayons de la spirale, qu'on portera successivement sur ceux du cercle de circonvolution, comme l'on a fait ci-devant à la spirale d'*Archimede*. Ainsi la longueur 1.*i*, après R*d*, sera porté du centre C en *x* sur le rayon C1, où elle déterminera le second point de la spirale; la parallele à R*d* passant par le point 2, donnera sur le rayon C2 le point *y* pour le 3e de la spirale, en y comprenant le donné A, la

longueur $3e$ donnera le point z sur le rayon Cb, ainſi des autres, en prenant toujours pour rayons de la ſpirale les différences du rayon aux ordonnées du quart de cercle, ſçavoir, $6n$. $12r$, & toutes les intermédiaires & ſuivantes, juſqu'au centre C, que la petiteſſe de la figure ne nous permet pas de bien diſtinguer en particulier, où l'on voit que depuis le point A de la premiere révolution, les rayons viennent en diminuant inſenſiblement juſqu'au centre, où le dernier eſt réduit à rien.

Il eſt viſible que ſi la ſpirale avoit dû avoir deux révolutions entieres, on auroit diviſé le rayon AR du quart de cercle générateur en 24 parties au lieu de 18 ; ſi la ſpirale avoit dû faire deux tours & demi, il en auroit fallu trente, qu'on auroit auſſi marqué ſur le rayon Cd pour prendre les différences des ordonnées, à l'égard du rayon AC ou de ſa parallele Rd, meſurées depuis la convexité de l'arc RC juſqu'au rayon Cd. Enfin après avoir marqué les points à la circonférence de la ſpirale, on la tracera comme nous avons dit de toutes les autres courbes à la main de point en point, en ſuivant un arrondiſſement que l'œil indique, ou avec une regle pliante.

M. de *Varignon*, inventeur de cette ſpirale, l'appelle, ainſi que ſes ſemblables, du

nom de *vertico-centrale*, parce que son centre est sur l'axe du cercle de circonvolution, mais non pas au même point que celui de la courbe génératrice : il appelle *co-centrale* celles dont les centres sont communs. Nous en allons donner un exemple.

Soit, comme dans les spirales précédentes, un cercle de *circonvolution*, divisé en douze parties égales, divisé par autant de rayons partant du centre C.

Soit aussi prise pour la courbe génératrice une autre que le cercle, par exemple, une *hyperbole équilatere* H Y D, dont on mettra le centre sur celui du cercle de circonvolution, comme on le voit dans la fig. 93. Fig. 93.

Soit un rayon donné A C pour le plus grand de la spirale à décrire, & pour son axe A X. On prendra une ligne constante C G à volonté, pour exprimer une révolution entiere de la spirale, comme nous avons fait pour la précédente, & qu'on divisera de même en autant de parties égales qu'on aura divisé la circonférence du cercle de circonvolution, nous ne la diviserons ici qu'en six, à cause de la petitesse de la figure.

On posera une des asymptotes A C sur l'axe A X, & l'autre sur la perpendiculaire C P, en retour d'équerre, parce qu'on a supposé l'hyperbole équilatere, auquel cas

le point C eſt également le centre de cette hyperbole, & du cercle de circonvolution; alors on décrira l'hyperbole génératrice H V R en dedans des aſymptotes AC, CP, & l'on tirera des paralleles à AC par les diviſions de la ligne CG, qui couperont cette courbe aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, & la conſtante CG aux points 1, 2, 3, 4, 5, G, les longueurs CH, 1.1, 2.2, 3.3, 4.4, 5.5, 6.G ſeront les rayons des arcs de révolutions de la ſpirale: ainſi prolongeant le rayon CH, on tracera du point C pour centre l'arc HK, qui rencontrera le rayon prolongé en K, dans la ſuppoſition que la conſtante ſoit diviſée en 12, quoique nous ne l'ayons diviſée ici qu'en ſix, pour rendre les diviſions ſenſibles à la vue dans une petite figure, où l'on doit éviter la confuſion: on ſuivra de même que dans la précédente les points trouvés ſur les rayons en L, *m*, *n*, &c. juſqu'en C, où il faut remarquer que la ſpirale n'atteindra point, mais tournera autour ſans y parvenir, parce qu'on ſçait l'admirable propriété des aſymptotes qui approchent toujours de l'hyperbole, ſans jamais la rencontrer; c'eſt pourquoi nous avons pris le point H en dedans pour commencement de la ſpirale; mais nous ne pouvons y aſſigner une fin, parce qu'il reſte vers le centre une diſtance AR

de l'asymptote à la courbe : ainsi on peut décrire un cercle autour du centre C sans jarret, avec la spirale, plus parfaitement que celui que l'on fait pour l'œil de la volute ionique, où l'on ne peut effacer ce jarret géométriquement.

Remarque sur le choix des courbes génératrices, pour former différentes sortes de spirales.

Dans le premier exemple des positions *vertico-centrales* des courbes génératrices, nous n'avons décrit qu'un quart de cercle, parce que si nous avions mis le sommet d'un demi-cercle au centre de celui de circonvolution, il se seroit formé deux spirales, tournant autour du centre C en sens contraire, qui auroient formé la figure d'un cœur, comme nous l'avons fait remarquer sur la spirale d'*Archimede*, répétée en sens contraire.

Pareille chose arrivera à toutes les courbes qui couperont l'axe également ou inégalement; d'où il résultera aussi des spirales égales ou inégales qui rebrousseront comme revenant en arriere.

Secondement, que si l'on prend, comme dans notre exemple de l'hyperbole équilatere, une courbe qui ne touche ou ne coupe

point l'axe, la ſpirale n'aura ni commencement ni fin. On peut lui aſſigner un commencement à volonté, en déterminant à volonté un rayon d'arc de révolution, mais non pas une fin, comme on vient de le dire. Si au contraire on prend une courbe logarithmique au lieu de l'hyperbole, la ſpirale qui en ſera engendrée, aura un commencement déterminé, mais non pas une fin : nous ne pouſſerons pas plus loin ce genre de théorie de ce qui doit arriver, ſuivant la configuration des lignes qu'on peut prendre pour génératrice ; il nous ſuffira d'en tirer les conſéquences ſuivantes.

COROLLAIRE I.

Il ſuit des conſtructions des différentes courbures de ſpirales, que l'on peut, 1°. fixer les révolutions de ces courbes à telle diſtance que l'on veut du centre C : car ſuppoſant qu'on veuille que la premiere finiſſe, par exemple en D, on menera par ce point la perpendiculaire DE à l'axe AC, laquelle rencontrera la génératrice en E par où
Fig. 94. tirant ES parallele à AC, la ligne ES ſera la conſtante qui exprime une révolution entiere à diviſer en autant de parties égales, que l'on aura diviſé le cercle de circonvolution ; mais ce point D étant déterminé, on n'eſt plus maître d'en déterminer d'autre

que celui qui doit ſuivre, parce que cette interruption d'uniformité cauſeroit un jarret.

COROLLAIRE II.

On connoîtra par l'inverſe à quel point de l'axe ſe terminent toutes les révolutions, en tirant des ordonnées par l'extrêmité de la conſtante, poſée ſur la tangente C T du quart de cercle, en répétant ſa longueur de ſuite; de ſorte que, ſi elle eſt le tiers de C T, la premiere révolution, à commencer en T, ſera déterminée au point x, la ſeconde en y, & la troiſieme en c, & par les ordonnées à l'axe en v & z, leſquelles ſont xv & yz. *Fig. 94*

USAGE.

Quoique la ſpirale ne ſoit pas une ſection de ces corps qu'on appelle *géométriques*, comme les ſpheres, les cônes & cylindres, c'eſt la ſection d'un de ces corps formés par la nature, qu'elle offre fréquemment à nos yeux dans les coquillages de terre & de mer avec une infinité de variations: ainſi elle eſt un objet de notre Stéréotomie, d'autant mieux que cette eſpece de courbe eſt très-fréquemment employée en architecture en petit, comme dans les chapitaux de colonnes, & une infinité d'ornemens de ſculpture ou de ſerrurerie, &

en grand, dans les consoles renversées, qu'on fait servir d'arcs-boutans à la poussée des voûtes, ou d'amortissemens aux façades qui se resserrent par le haut, comme sont la plûpart de celles de nos Eglises.

Si lorsqu'on a trouvé par les voies géométriques, indiquées dans ce problême, une sorte de spirale qui plaît à la vue, mais qu'on voudroit un peu plus large ou plus étroite, sans toucher à une des dimensions de hauteur ou de largeur, il sera facile de la réduire par la grille, c'est-à-dire par les carreaux, comme les desseins, en rétrecissant ou haussant les parallélogrammes qui doivent représenter les quarrés parfaits de la grille appliquée sur le dessein original.

Il nous reste à donner la maniere d'incliner les joints des pierres de l'appareil d'une courbe en spirale, de maniere que les angles soient égaux de part & d'autre; ce qu'on ne peut faire qu'en tirant une tangente à cette courbe, à laquelle une perpendiculaire, par le point donné, est la ligne qui satisfait à cette question.

PROBLEME II.

Par un point donné au contour d'une ſpirale, lui mener une tangente.

Premiérement, s'il s'agit de la courbe méchanique, attribuée à *Archimede*, la ſolution de ce problême dépend de la quadrature du cercle, puiſqu'il a démontré lui-même que la ſoutangente, à la fin de la premiere révolution, eſt égale à la circonférence du cercle circonſcrit. Mais ſuppoſant le rapport du diametre à la circonférence de 7 à 22, ou 100 à 314, ce qui ſuffit pour la pratique des Arts, il ſera aiſé de tirer la tangente demandée.

Soit la ſpirale ABPC, qui fait deux révolutions complettes, la premiere de C en B depuis le centre C, la ſeconde de B en A, ſi l'on donne le point B pour celui par lequel on doit mener la tangente, on menera une perpendiculaire au rayon CB égale à la circonférence du cercle, qui auroit BC pour rayon, ou à ſa moitié, comme dans cette figure, en BD; enſuite ayant fait DT perpendiculaire à BD, & égale à BC, ou à ſa moitié, on tirera BT, qui ſera la tangente demandée. *Fig. 95.*

Si le point donné étoit en *d*, on prendra une des parties aliquotes de la circonférence

du cercle, qui a C*d* pour rayon, au lieu de BC, comme le tiers ou le quart, & toute autre.

Si le point donné est en P dans l'intervalle de la premiere révolution à la seconde, on en usera encore de même; ayant tiré PC, on lui fera la perpendiculaire PH, qu'on fera égale à la circonférence du cercle, qui a PC pour rayon, & l'on achevera, comme ci-devant, portant PC en HF, & l'on tirera HF, la ligne PF sera la demandée, à laquelle on fera la perpendiculaire PN, qu'on cherche pour joint d'un appareil.

Secondement, si les spirales sont élevées d'un degré au dessus de celle d'*Archimede*, comme les *vertico-centrales*, dont nous venons de parler, & les *co-centrales*, il faut une nouvelle construction pour leur tirer des tangentes par des points donnés.

fig. 92. Soit la spirale circulaire vertico-centrale AEFGC d'une révolution & demie, & le point P donné pour lui tirer une tangente, on portera sur le rayon CP prolongé le double de la longueur en C*n*, & sur CH perpendiculaire à ce rayon la longueur CH égale à l'arc de révolution IP rectifié: puis ayant fait H*g* parallele & égale à C*n*, on portera sur la même H*g*, prolongée la longueur C*d* du rayon de la premiere révolution.

tion complette, à commencer du centre C, de G en F, si le point P & le point H sont au dessus de C E, ou sur cf de n en f, si ce point est au dessous, comme dans la figure présente, & par les points f & g, on tirera une ligne droite qui rencontrera C H prolongée en x; la ligne menée du point x par le point donné P sera la tangente que l'on cherche, à laquelle, si l'on tire une perpendiculaire Pq, ce sera la direction du joint d'un appareil de pierres de suite pour former une spirale de cette espece.

La démonstration de cette pratique, tirée de l'équation générale de M. de *Varignon*, est un peu trop longue pour avoir place dans cet abrégé: on la trouvera dans ma Stéréotomie, Tome I, Liv. II, p. 201.

PROBLEME III.

Décrire la courbe de la section plane d'un corps cylindrique annulaire, & d'un hélicoïde coupé de même par un plan parallele à l'axe de l'un ou l'autre de ces corps.

Nous avons montré au Livre précédent que les sections planes d'un corps annulaire, coupé par un plan passant par le centre C de l'anneau, perpendiculaire à celui qui passe par l'axe courbe de l'anneau AKE, fig: 96.

étoit un cercle ou demi-cercle, ou demi-ellipſe, comme on le voit en AHB; ce qui eſt évident par la génération de ce corps cylindrique courbe.

Fig. 96. Mais ſi l'anneau eſt coupé par un plan perpendiculaire à celui de la baſe, paſſant par l'axe courbe à une diſtance plus grande du centre que le rayon du vuide de l'anneau, c'eſt une courbe du quatrieme ordre, qu'il eſt cependant très-aiſé de décrire.

Soit le demi-cercle ou demi-ellipſe AKE, & ſon parallele concentrique BFD qui comprennent entr'eux une demi-couronne de cercle qui repréſente le plan de la ſection d'un demi-anneau, dont le vuide du milieu eſt le demi-cercle BFD.

Soit auſſi un plan vertical perpendiculaire au premier AKE qui coupe cet anneau, ſuivant une ligne AE, paſſant par ſon centre C: il eſt clair que ſa ſection ne conſiſtera qu'en deux demi-cercles AHB & D*h*E, ſéparés l'un de l'autre d'un intervalle vuide BD.

Mais ſi un autre plan, auſſi perpendiculaire au premier AKE, coupe l'anneau, ſuivant une ligne IL, au-delà du vuide BFD, la ſection ſera continue, & au lieu des deux demi-cercles ſéparés, elle ſera une courbe ondée INM*n*L, dont il faut trouver le contour par pluſieurs points.

Pour y parvenir, il faut diviser le diametre A B en autant de parties que l'on voudra, égales ou inégales, comme 1, 2, G, 4.5, par lesquelles on tracera du centre C de l'anneau autant de cercles concentriques. Il nous suffit ici d'y tracer des quarts, qui couperont la ligne droite I L de la section dans le plan A K E aux points *v*, *x*, P, *y*, *z*, par lesquels on élevera des perpendiculaires, qu'on fera égales aux ordonnées au diametre AB, tirées par les points 1, 2, G, 4.5, sçavoir *vu* égale à 1.*o*; *x*X égale à 2.*o*; PN égale à GH, *y*Y égale à 4.*o*; & QM égale à peu près à *o*.5, ce que la petitesse de la figure ne permet pas d'exprimer bien distinctement, & par les points *u*, X, N, Y, *z*, M, on tracera la moitié de la courbe demandée, à laquelle l'autre moitié M*n*L sera parfaitement égale à ce qu'il falloit faire.

Présentement il sera aisé d'appercevoir les différens contours & variations dont la courbe de cette section est susceptible, en supposant la corde de la section I L plus ou moins éloignée du centre de l'anneau C: car si elle passoit par le point F, extrêmité du rayon du vuide de l'anneau, la section s'abaissant au plan de la base en F, y seroit divisée en deux parties séparées, parce que la hauteur M de son milieu s'évanouit en F.

Si au contraire la corde de ſection I L eſt éloignée du centre C, de maniere qu'elle ſoit tangente au cercle du milieu de l'anneau, qui eſt ſon axe courbe, la ſection ne s'abaiſſera point à ſon milieu, parce que l'ordonnée à ce point ſera égale à G H du demi-cercle A H B : ainſi au lieu d'une inflexion au milieu, ce ſera le ſommet de la courbe.

Enfin plus la corde I L de ſection s'éloignera, plus elle reſſemblera à une ovale.

COROLLAIRE.

De la deſcription de cette ſection d'un corps cylindrique annulaire, on peut tirer facilement celle d'une vis ou corps hélicoïde, ſuppoſé coupé par un plan parallele à ſon axe, parce que la projection de ce corps eſt un anneau, & l'autre étant un corps cylindrique tournant en montant, il ne s'agit que d'incliner le diametre de la ſection, & d'y appliquer les ordonnées correſpondantes à l'horizontale, ſuivant un angle donné ; ce que nous ferons mieux ſentir lorſque nous parlerons de la maniere de changer les courbes horizontales en rampantes, qui en conſervent toutes les propriétés.

USAGE.

Les voûtes ſur le noyau & les berceaux tournans ſont des anneaux fermés & ouverts ; ſi ces voûtes ſont interrompues par quelques pans de mur droit, comme une baſe de clocher derriere un chevet tournant, il s'y forme la courbe dont nous avons parlé.

CHAPITRE IV.

De l'imitation des lignes courbes régulieres par des compoſitions d'arcs de cercles.

SECTION I.

L'IGNORANCE des propriétés des lignes courbes les plus communes dans les Arts, & une plus grande facilité de tracer des arcs de cercle que des ellipſes, ont fait chercher pluſieurs moyens de les imiter par un aſſemblage de portions de cercles, mais ſans ſuccès en pluſieurs circonſtances, comme l'on voit dans l'Art de deſſiner l'Architecture, par *Boſſe*, qui avoit raſſemblé les meilleures pratiques de ſon tems. M. *Pitot* de l'Académie des Sciences, eſt le premier qui en ait donné une méthode générale & géométrique, pour éviter les jarrets qui ren-

doient ces imitations désagréables à la vue. M. *Camus* ensuite, dans son Cours de Mathématique, fait pour les Ingénieurs militaires, en a donné d'autres, & a étendu cette théorie à de nouvelles circonstances de plus de points donnés.

Regle générale des imitations.

Tout l'art d'imiter les courbes de toutes especes par des assemblages de différens arcs de cercles, consiste à poser les deux centres de deux arcs qui doivent se joindre sans jarreter sur une même ligne droite qui passe au point de leur jonction.

La raison en est évidente par les seuls élémens de Géométrie, parce que le rayon d'un grand, comme d'un petit cercle, fait toujours, avec son arc quelconque, un angle mixte infiniment approchant du droit, & l'arc un angle infiniment petit avec sa tangente au point d'attouchement, où elle est perpendiculaire au rayon; de sorte que l'œil ne peut appercevoir cette différence infiniment petite de part & d'autre de ce point, il ne s'apperçoit qu'à quelque distance delà du plus & du moins de courbure des arcs de rayons inégaux : mais pour trouver cette position des rayons & des centres dans des circonstances données, il a fallu de bons

Géometres pour parvenir à donner des formules générales qui fourniſſent de faciles conſtructions.

PROBLEME I.

Deux axes étant donnés, imiter une ellipſe par un aſſemblage de quatre arcs de cercles, ou ſimplement, à l'uſage de notre Art, une moitié d'ellipſe, ou anſe de panier, avec trois arcs de cercles de 60 degrés chacun.

Soit AB le grand axe donné, & CD la moitié du petit, on la portera ſur AB de B en *d* pour avoir la différence C*d* des deux demi-axes. On la diviſera en deux également en *m*, puis on portera C*m* en C*y*; ſur *yd* comme diametre, on décrira le demi-cercle *yed*, qui coupera l'axe CD en *e*; on portera l'intervalle *ye* en *y*F, les points F & *f* équidiſtans de C ſeront les centres des petits arcs des extrêmités de la demi-ovale, qu'on déterminera à 60 degrés, en portant AF en AI, côté d'un triangle équilatéral AFI, dont on prolongera le côté IF juſqu'à ce qu'il rencontre DC prolongé en X, où ſera le centre de l'arc du milieu IDE, comme la figure le montre entre les rayons XI & XE. C. Q. F. F. *Fig. 97.*

La démonſtration de la juſteſſe de cette opération, ſuivant la regle générale que

nous avons établie ci-devant, eſt viſible, en ce que les deux centres X & F d'un côté, & X & *f* de l'autre, ſe trouvent ſur une même ligne, de ſorte qu'il ne peut y avoir de jarret dans la jonction de l'arc du milieu IDE avec les extrêmes IA & EB.

Quant à l'art de trouver cette conſtruction, il eſt plus difficile qu'il ne paroît, parce qu'il dérive d'une équation algébrique, trouvée par M. *Pitot*, qu'il eſt inutile de répéter ici, où il ne s'agit que des élémens de pratique.

M. *Camus* a traité cette matiere tout différemment en cinq ou ſix problêmes ſur des données, dont il n'eſt pas mention dans le précédent, par exemple dans le premier, outre les axes, il ſuppoſe que les centres des arcs extrêmes ſoient donnés; ce qui fournit un moyen de varier les anſes de panier, en les arrondiſſant plus ou moins, auquel cas les arcs extrêmes doivent être plus grands que de 60 degrés, ſi la moitié du petit axe eſt moindre que les cinq douziemes du grand, & par conſéquent celui du milieu ſera d'un plus petit nombre de degrés; voici ſa conſtruction.

Fig. 97. Soit AB le grand axe de l'*anſe de panier*, CD la moitié du petit ou ſa *montée*, & les centres des arcs extrêmes donnés en F & *f*: on portera AF en D*g* ſur la montée, &

l'on tirera Fg; ſur le milieu M, on tirera la perpendiculaire mX, qui coupera le petit axe DC prolongé, s'il le faut, en X, où eſt le troiſieme centre de l'arc du milieu, & duquel on tirera par les centres F & f donnés les lignes XE, XI qui donneront les points E & f pour ceux des jonctions des différens arcs de cercles: mais cette conſtruction ne peut ſervir que lorſque les rayons des extrêmes ſont plus petits que le demi-axe CD: car alors le point g tombant en C, la perpendiculaire tirée du milieu de FC ne couperoit point DC prolongé, elle lui ſeroit parallele; & ſi ces rayons ſont plus grands, comme il peut arriver, il ſeroit encore impoſſible.

Et ſi la montée CD eſt moindre que le quart du diametre AB, les arcs extrêmes étant d'une courbure trop différente de celle de l'arc du milieu, l'ovale devient d'un contour peu agréable à la vue; c'eſt pourquoi M. *Camus* propoſe d'y remédier par une anſe de panier à cinq centres, dont il donne la conſtruction que nous rapporterons, après que nous aurons parlé de ſon problême pour trois centres, dont celui du milieu eſt donné.

PROBLEME. II.

Les deux axes d'une anse de panier à trois arcs de cercles étant donnés, & le centre de celui du milieu ou son rayon, tracer l'anse de panier.

Fig. 97. On portera sur A B la longueur du rayon XD donné de A en *f*, d'où l'on tirera *f*X, qu'on divisera en deux également au point O, sur lequel on élevera la perpendiculaire O F, qui coupera A B en F, où sera le centre d'un des arcs extrêmes, par lequel on tirera X I & son égale X E, les points I & E seront ceux de jonction des trois arcs A I, I E, E B qui ne feront point de jarret, parce que les deux centres des arcs contigus sont chacun sur une même ligne, suivant notre regle générale.

PROBLEME III.

Les deux axes étant donnés, & les centres des deux arcs extrêmes, tracer une anse de panier composée de cinq arcs de cercles.

Comme ce problême peut être résolu de plusieurs façons, on y détermine les deux arcs extrêmes, le nombre de degrés de ces arcs, sçavoir ceux-ci de 60 degrés chacun, leurs contigus intermédiaires de 15, & celui du milieu de 30; ce qui fait en tout 180 degrés, valeur du demi-cercle.

De l'intervalle F*f* pour rayon, & d'un de ces deux points F ou *f* pour centre, on fera un arc qui coupera DC prolongé en Q, d'où l'on tirera par les points F & *f* les lignes QE, Q*e*; ensuite du point Q pour centre, & QE pour rayon, on tracera l'arc EH*e* qui coupera la montée CD prolongée en H d'une petite quantité qu'il faut porter quinze fois de Q en S sur la même prolongation en bas; puis ayant porté la longueur QS sur QE & sur Q*e*, on aura les points R, P par lesquels & par le point *f* on tirera les lignes SRG, SP*g* qui détermineront les points G & *g* de jonction des arcs intermédiaires EG, *eg* avec celui du milieu, dont les centres sont aux points R & P. Ainsi on a les cinq centres proposés, sçavoir les deux extrêmes F & *f* sur l'axe, les deux moyens R & P au dessous, & celui de l'arc du milieu, qui est le 5[e] en en S; ce qu'il falloit trouver, pour empêcher qu'il n'y ait des jarrets au contour de l'anse de panier, en ce que les deux centres des arcs contigus sont toujours sur une même ligne. *Fig. 98.*

Nous ne mettrons point ici la démonstration des moyens par lesquels on est parvenu à cette construction; on peut la voir dans les Elémens de Géométrie de M. *Camus*, qui en est l'inventeur: ils sont entre

les mains de tous les *Ingénieurs militaires*, à qui le Roi en a fait présent.

Quoique cet Auteur ait démontré le peu de différence qu'il y a du contour de ces anses de panier avec les ellipses géométriques, & que leur construction paroisse plus facile dans l'exécution des arcs de cercle que par les points & les autres manieres organiques que nous avons donnée ci-devant; je crois qu'on doit toujours préférer l'original à la copie, & la régularité réelle à l'apparente.

J'ai encore une raison plus forte, c'est que j'ai montré dans ma Stéréotomie, au second tome, en parlant des voûtes sphéroïdes, qu'outre qu'il n'est pas plus difficile de tracer des ellipses que des ovales, ou anses de panier, c'est qu'on ne peut exécuter ces voûtes sur un plan ovale par des compositions d'arc de cercle, parce que les lits de chaque rang de voussoir ne doivent pas être équidistans; ce qui a induit en erreur tous les Auteurs de la coupe des pierres, comme je l'ai démontré par les faux *traits* qu'ils en ont donnés qui embarrassent les Appareilleurs & les jettent dans des ragréemens & des tâtonnemens sans succès pour la régularité de l'appareil.

SECTION II.

De l'imitation des ellipſes ou de leurs parties par des arcs de cercles, aſſujettis à des tangentes & des points d'attouchemens donnés.

PROBLEME I.

(En terme de l'Art) *faire le cintre d'un arc rampant de deux portions de cercles tangentes aux pieds droits, & à une ligne de ſommité.*

Ce problême ne peut pas toujours être réſolu : pour connoître les cas où il peut l'être, il faut prolonger les pieds droits tangens AP, BR jusqu'à la ligne de ſommité donnée DE, ſur laquelle on portera d'un côté la longueur DP en DG, & ER en EH, & tirer les lignes PG & RH : ſi elles ne concourent pas au même point ſur la ligne DE, le problême ne peut être réſolu par des arcs de cercles. Il faut baiſſer la ligne de ſommité en SO, paſſant parallélement en X, où ces deux lignes ſe croiſent, ou bien l'élever à ce point, ſi la ligne donnée pour ſommité étoit au deſſous : la raiſon de cette impoſſibilité, c'eſt qu'il eſt démontré dans les Elémens de Géométrie, que, ſi d'un point donné hors du cercle, on mene deux tangentes, elles ſont néceſſai- *Fig. 99.*

rement égales entr'elles, & si elles ne le sont pas, c'est une marque que l'arc touché par ces deux tangentes, est une ellipse, lorsque la courbe rentre en elle-même.

Cette correction étant faite, si on en est le maître ; on tirera par les trois points d'attouchement donnés R, X, P, des perpendiculaires à ces trois tangentes, qui se couperont aux points *c* & C, où seront les centres des deux arcs, qui étant rassemblés, en forment un rampant PXR. C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

Delà on tire la maniere de faire des arcs rampans de portions de cercles en toutes sortes de positions de lignes données, pourvu que la distance de la ligne de sommité à la ligne de rampe ne soit pas déterminée, mais seulement sa position.

1°. Si la ligne de sommité est horizontale, & les pieds droits à plomb, l'arc rampant sera nécessairement composé de deux quarts de cercles de rayons inégaux, dont on trouvera les centres comme il suit.

Ayant porté la hauteur de la rampe AP en A*b* d'alignement à RA, base horizontale, on divisera R*b* en deux également en C, *Fig.* 100. ou l'on élevera la perpendiculaire CH indéfinie, à laquelle on tirera par le point P la perpendiculaire P*c*. Les points *c* & C se-

ront les deux centres des deux arcs de cercles R H & P H, dont le premier ſera tangent aux lignes du pied droit D R, & à la ligne de ſommité horizontale S O, & le ſecond ſera auſſi tangent à la même S O, & au pied droit P A. C. Q. F. F. fig. 101.

Secondement, ſi la rampe eſt parallele à la ligne de ſommité S O, & les pieds droits à plomb. Ayant diviſé R A en deux également en *m*, on lui menera par ce point la perpendiculaire *m* T, qui coupera la ligne de ſommité au point T, par lequel on tirera la perpendiculaire T C, qui coupera R A en C, où ſera le centre du premier arc R T moindre que le quart, & par le point P une parallele à A R qui coupera T C au point *c*, où ſera le centre du petit arc T P plus grand que le quart de cercle ; l'un & l'autre ſeront tangens à la ligne de ſommité au point commun de jonction T, & aux pieds droits D R & A P. C. Q. F. F.

Troiſiémement, ſi la ligne de ſommité donnée de poſition à l'égard de P R, comme D E, & non-pas de diſtance, n'eſt ni parallele à la ligne de rampe, ni à l'horizon, on opérera comme il ſuit. fig. 99.

Ayant trouvé le point X, comme il a été dit au commencement de ce problême, pour tirer par ce point une parallele à la ligne donnée, laquelle ſera celle de ſommité, on

lui ménera une perpendiculaire indéfinie X*m*, & par les points P & R, des perpendiculaires P*c*, RC aux pieds droits AP, RB, qui couperont X*m* aux points *c*, C, dont le premier ſera le centre de l'arc PX, & l'autre de l'arc XR, qui formeront enſemble l'arc rampant PXR.

La juſteſſe de ces opérations eſt évidemment prouvée, en ce qu'elles ſont conformes à notre regle générale. Voyons comment on doit faire lorſque l'on doit employer plus de deux arcs de cercles pour en former un rampant.

PROBLEME II.

La différence donnée des hauteurs d'impoſtes d'un arc rampant, & leur intervalle horizontal (ſans autres hauteurs fixées), le tracer & compoſer d'un auſſi grand nombre d'arcs de cercles que l'on voudra, égaux en nombre de degrés, & inégaux en longueurs de rayons.

Soient données les hauteurs A & P pour impoſtes d'un arc rampant propoſé à compoſer de cinq arcs de cercles raſſemblés.

Sur la hauteur de rampe BP comme diametre, ayant décrit un demi-cercle PEB, on le diviſera en cinq parties égales, par leſquelles on tirera les cordes B.1, 1.2, 2.C, &c. auxquelles on menera des paralleles tangentes

tangentes au cercle pour lui circonſcrire la moitié d'un décagone.

Sur AB prolongée vers E, on portera ſucceſſivement les côtés de ce polygone circonſcrit en 1, 2, 3, 4, E; puis ayant diviſé EA en deux également en *m*, on menera *m*H parallele & égale à BP, ſur laquelle on décrira un demi-cercle avec le même polygone circonſcrit, mais tourné différemment, commençant par porter la moitié d'un pan en H5, ſur P5 parallele à BA, & du point 5 pour centre, on décrira l'arc P*d* juſqu'à l'alignement du côté 4.5 prolongé; enſuite du point 4 pour centre, on décrira l'arc *de* terminé à l'alignement du côté 3.4 prolongé, du point 3 pour centre, & pour rayon 3*e*, on décrira l'arc *ef*; de même du point 2 & 2*f* pour rayon, on décrira l'arc *fg*, & enfin du point 1 l'arc *g*A; ce qui donne l'arc total rampant A*gfed*P tangent aux pieds droits AD & PB aux points de hauteurs données A & P; ce qu'il falloit faire, enſorte que les arcs aſſemblés ne fiſſent point de jarrets, & fuſſent tous d'un même nombre de degrés, quoique de rayons & de contours inégaux. *Fig.* 101.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette pratique, que la courbe, dont eſt formé cet arc rampant, eſt une

portion de ſpirale, compoſée d'arcs de cercles, comme nous le ferons voir dans le problême ſuivant.

PROBLEME III.

Imiter les ſpirales par une compoſition de différens arcs de cercles.

Quoique les contours des lignes ſpirales qu'on emploie dans les ornemens ſoient regardées par les Deſſinateurs, comme devant être plus aſſujetties au goût qu'aux regles de la Géométrie, les Architectes ſe ſont cependant efforcés de donner des regles de préciſion au contour de la volute du chapiteau ionique, ſans pouvoir y parvenir, comme nous le ferons remarquer, après avoir parlé en général de la compoſition de cette courbe par des arcs de cercles.

La plus ſimple & la plus réguliere, eſt celle qui étant établie ſur un axe, qu'ils appellent *cathete*, eſt compoſée de demi-cercles, dont les diametres ſont rangés ſur cette ligne dans une progreſſion qui peut varier à l'infini.

Soit, par exemple, AB l'axe d'une ſpirale à faire d'arcs de cercles en progreſſion ſous-
Fig. 103. double. Du milieu C ayant décrit un demi-cercle ADB, on diviſera CB en deux également en *m*, d'où, comme centre, on dé-

crira de l'autre côté de l'axe le demi-cercle BEC; ſur C*m*, comme diametre, un troiſieme demi-cercle CF*m*, puis un quatrieme *m*G*h*, & enfin un cinquieme *hi* qui marque deux révolutions & demie; ce qu'on peut pouſſer à l'infini, ſuivant cette progreſſion, $1 . \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$, &c. ce qui forme la figure d'une corne de belier, ou de ce coquillage du nombre des nautiles, qu'on appelle *corne d'Ammon*, laquelle ne convient pas à la ſpirale de la volute du chapiteau ionique, qui doit être plus arrondie & moins alongée: ainſi on pourroit, au lieu de la diviſion de moitié, prendre la progreſſion des deux tiers du diametre.

Mais comme des demi-cercles ſont des arcs trop grands pour ne pas laiſſer appercevoir une ſorte d'irrégularité dans la ſuite de la courbe, les Architectes ont jugé avec raiſon qu'elle ſeroit moins ſenſible, en n'en prenant que la moitié, c'eſt-à-dire les quarts du cercle, dont les centres ne ſont plus rangés ſur un axe, mais ſur les ſommets des angles d'un quarré inſcrit dans un petit cercle, qu'ils appellent l'*œil de la volute*, placé au centre du cercle de circonſcription: & pour les quatre quarts de cercles, formans la premiere révolution, comme la volute en fait trois, on inſcrit dans le premier quarré un ſecond & un

troisieme à certaine distance; ce qui donne douze centres pour autant de quarts de cercles, composant les trois révolutions de la spirale. On peut aussi, sans faire de quarrés, distribuer ces douze centres sur les deux diagonales du premier quarré; mais cette construction n'est point réguliere.

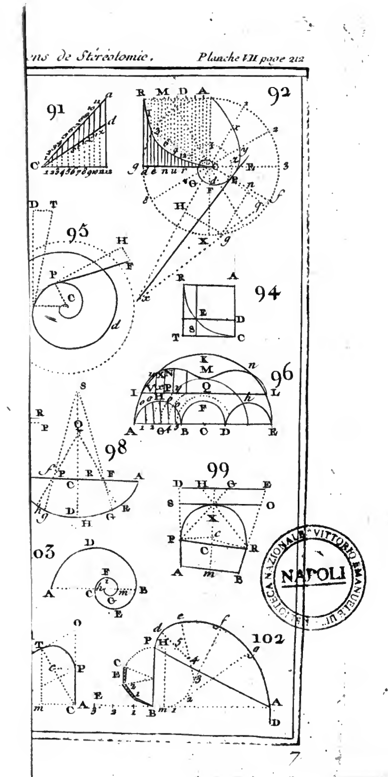
Défauts de la pratique des Architectes.

Premiérement, il est clair que les centres étant également éloignés entr'eux de la longueur d'un côté du quarré, ne se rapprochent point comme ils devroient faire pour passer insensiblement de la premiere révolution à la seconde, comme on a vu dans la précédente spirale.

Le second défaut est dans la transition de la premiere révolution à la seconde, où il y a deux irrégularités.

L'une que le rayon du cinquieme quart de cercle, qui commence la seconde révolution, ne diminue pas proportionnellement aux quatre précédens, suivant une progression néceſſaire à la régularité de la spirale, puisque la distance du quatrieme au cinquieme centre est plus petite que celle du 3[e] au quatrieme.

L'autre, que les deux rayons du 4[e] & du


91
92
95
94
96
98
99
03
102

5e quart de cercle ne ſont plus ſur une même ligne droite : par conſéquent ils ne feront pas tous deux perpendiculaires à la même tangente au point de jonction des arcs ; il y en aura donc un des deux incliné à ce même point : par conſéquent il y aura en ce point de jonction un jarret ; je conviens qu'il ne ſera pas beaucoup ſenſible, mais il doit l'être à l'œil délicat, & s'il ne l'eſt pas, il le ſera toujours à l'eſprit géométrique, qui aura lieu de n'être pas ſatisfait.

Troiſiémement, que la diminution des rayons du cinquieme au ſixieme centre n'eſt plus dans la même progreſſion que du quatrieme au cinquieme ; il en eſt de même, & avec le même défaut du 8 au 9, que du 4 au cinq, à peu de choſe près.

Goldman s'étant apperçu des défauts de la tranſition du 4 au 5, & du 8 au 9, a trouvé un moyen de placer ces centres dans la même ligne, en inſcrivant les quarrés intérieurs aux angles deſquels ſont les centres, non à des diſtances égales, comme les Auteurs des Livres d'architecture, qui l'avoient précédé, l'avoient enſeigné, mais en les rangeant ſur un côté commun 1.4. Par cet ingénieux moyen, les centres 4 & 5 du paſſage de la premiere à la ſeconde révolution qui étoient écartés, ſe trouvent ici ſur *Fig. 104.*

la même ligne, de même que le 8e & 9e, qui font le passage de la seconde à la troisieme révolution; ce qui corrige parfaitement les jarrêts que j'ai reprochés aux constructions antérieures.

Daviler admirant cette ingénieuse invention, lui a prodigué le nom de *géométrique*; mais il n'a pas fait attention qu'il restoit encore à corriger l'inégalité de progression, de diminution des longueurs des rayons qui se font, suivant les nombres 3, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 2, lesquels ne font point de suite de progression uniforme : par conséquent les quarts de cercles assemblés ne peuvent former une spirale géométrique, mais faire ces irrégularités, que l'œil, à la vérité, ne peut appercevoir, parce que les arcs sont joints à des points d'attouchemens communs, où ils ne font point de jarrets, mais elles sont suffisamment sensibles au raisonnement, pour ne pas admettre le nom de description géométrique.

Celle que *Vignole* donne, suivant la progression des tangentes, en auroit approché, s'il avoit sçu les joindre par des arcs de cercles qu'il laisse chercher en tâtonnant; ce qui ne signifie rien.

Il nous reste à donner la maniere d'inscrire une seconde spirale dans une premiere, pour lui servir de compagne, en terminant

un côté de la côte d'une volute, soit dans le chapiteau ionique, soit ailleurs.

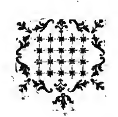
Si l'on se sert de la maniere de *Goldman* pour déterminer les centres des quarts de cercles sur les angles d'une suite de quarrés, il est clair qu'il n'y a qu'à y inscrire la même figure plus petite, dont le côté peut être trouvé par cette analogie, comme le rayon de la premiere spirale est à celui de la compagne, qui est donné par l'intervalle de la largeur de la côte : ainsi le côté du quarré inscrit dans l'*œil* de la volute est à celui de la spirale intérieure;

Ou bien sans calcul, en faisant un triangle avec la longueur du grand rayon 3A du côté du quarré, de l'œil A1 égal à 1.2, & *Fig.* 104.
portant sur AC la largeur de la côte donnée A*a* pour élever au point *a* une parallele A*b* au côté A1, laquelle coupera C1 au point *b*, qui donnera la longueur *ab* pour le côté du quarré intérieur, & par conséquent la position des seconds centres de la compagne que l'on doit décrire pour régler la diminution de la côte de la volute.

PROBLEME IV.

Alonger ou rélargir, ou incliner une spirale, ou toute autre courbe, comme l'on voudra, sans altérer le rapport de leurs contours.

Fig. 105. C'eſt ici un problême de deſſein des plus faciles à réſoudre, par la grille de quarrés égaux entr'eux, qu'on change en parallélogrammes rectangles, plus hauts ou plus larges que les quarrés; où ſi l'on veut faire la figure inclinée, qu'on appelle *rampante*, on doit faire ces parallélogrammes, ſuivant un angle donné, & inſcrire dans chaque partie des parallélogrammes celle de la courbe originale qui traverſe les quarrés, ou diagonalement, ou obliquement, ce que peuvent exécuter tous ceux qui ſçavent un peu deſſiner, comme l'on voit dans le rapport des deux figures; ce qui tombe ſouvent, en cas de pratique, aux ornemens & baluſtrades des rampes d'eſcaliers.



QUATRIEME PARTIE.

De la deſcription des figures des ſections des corps qui ne doivent ou ne peuvent être décrites que ſur des ſurfaces concaves ou convexes.

Nous n'avons parlé juſqu'ici que des ſections faites par des plans coupans des corps ronds, leſquelles peuvent être par conſéquent tracées ſur les ſurfaces planes qui les ont formé. Il s'agit préſentement de les tracer ſur les ſurfaces courbes qui leur ſont naturelles, comme celles des ſpheres, cônes, cylindres, anneaux, & autres.

Nous avons de plus à décrire celles qui ſe font par la pénétration mutuelle de ces corps à leurs ſurfaces, qui peuvent quelquefois être décrites ſur des plans, mais le plus ſouvent ne peuvent l'être que ſur des ſurfaces concaves ou convexes, égales à celles où elles ont été formées; on appelle celles-ci, *courbes à double courbure*, auxquelles on peut aſſigner, comme aux corps ſolides, trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur.

Mais comme dans une deſcription ſur une ſurface plane, on ne peut exprimer ces trois dimenſions, on a imaginé de repréſenter ces courbes par le moyen de la *projection*, qui n'en eſt qu'une repréſentation défigurée, mais qui ſert de moyen pour parvenir à la repréſentation exacte que l'on en doit faire ſur la ſurface concave ou convexe qu'on doit former pour la décrire dans toute l'exactitude, comme nous allons l'expliquer.

De la projection.

Ce mot qui vient du Latin *projicere* jetter, peut avoir pluſieurs ſignifications, comme à jetter des bombes, & autres choſes.

Il ſignifie, pour notre ſujet, la repréſentation d'un corps, des angles, & des contours duquel on ſuppoſe une infinité de perpendiculaires tomber ſur un plan, où leur continuité forment une trace : telle eſt celle de l'égoût des eaux de pluie tombant autour d'un toit ; cette comparaiſon fait cependant connoître qu'il n'eſt pas néceſſaire que ces lignes ſoient toujours exactement perpendiculaires au plan où elles ſe terminent, pourvu qu'elles ſoient toujours paralleles entr'elles : car ſi ce toit eſt circulaire, comme celui d'une tour ronde, &

que le terrein ſoit de niveau, la trace des gouttes d'eau y décrira un cercle ; mais ſi cette tour étoit ſur le penchant d'un glacis, la trace de l'égoût y décriroit une ellipſe, qui ſeroit cependant l'effet de la même projection reçue ſur un plan, auquel la chûte de l'égoût n'eſt pas perpendiculaire.

De cet exemple familier, nous déduiſons des conſéquences ſenſibles à l'égard de notre projection.

1°. Que la projection d'une ligne peut n'être qu'un point, comme l'égoût d'un fil mouillé & à plomb ne donnera qu'une goutte d'eau, tombant ſucceſſivement toujours au même point.

2°. Que la projection d'une ſurface plane, en ſituation perpendiculaire au plan de projection, n'eſt qu'une ligne : tel eſt l'égoût d'une feuille de fer blanc, expoſée à la pluie en ſituation verticale, qui ne fera ſur le terrein uni qu'une trace de ligne droite.

3°. Que la projection d'un corps ſolide ne peut être que le contour d'une ſurface.

4°. Que ce contour ne peut exprimer qu'une poſition du corps ; car la trace de la gouttiere peut varier de pluſieurs façons à l'égard du même corps, en changeant ſa ſituation : par exemple, ſi l'on ſuppoſe un cube, comme un gros dez, expoſé à la pluie, ſon égoût ne fera un quarré parfait

que lorſqu'il ſera poſé à plat ſur un de ſes quarrés en ſituation horizontale : s'il eſt poſé ſur une de ſes arêtes, ſa projection ſera un parallélogramme égal à la diagonale, ſi elle eſt perpendiculaire au plan horizontal, & ſi le même dez eſt poſé ſur un de ſes angles, enſorte que ſon oppoſé diagonalement ſoit à plomb de celui ſur lequel on le ſuppoſe appuyé dans ce point d'équilibre, la trace de ſon égoût ſera un *exagone.*

Si au lieu de cet égoût, en lignes verticales ſur un plan horizontal, on ſuppoſoit des lignes horizontales ſur un plan vertical, il en réſulteroit toujours le même effet des traces qui ne changeroient que de nom.

Ainſi le premier exemple d'une projection horizontale s'appelleroit le *plan horizontal* ou *ichnographie.* Dans la ſeconde ſuppoſition d'une projection verticale, la trace s'appelle *profil*, *coupe*, ou *élévation*, ſuivant les circonſtances de la repréſentation.

Obſervation générale.

La projection raccourcit toutes les lignes & ſurfaces qui ne ſont pas paralleles au plan de projection.

Cette vérité eſt aſſez ſenſible pour n'avoir pas beſoin d'être démontrée ; car ſi la

ligne A B eſt projettée ſur un plan D E en *b a*, il eſt clair que B*c* & *ba* étant ſuppoſées paralleles ſont égales, mais B A eſt à *bc* comme l'hypoténuſe au côté, lequel eſt par conſéquent plus petit. Fig. 106.

Si B A C eſt une ſurface en triangle rectangle, poſé verticalement, ſa projection ne ſera encore que la ligne *b a*, parce que les points A & C ſont confondus dans le ſeul point *a*, ſuppoſant cette ligne verticale, comme nous venons de le dire.

Mais ſi le triangle eſt incliné à l'horizon, comme F G H, ſa projection ſera encore un triangle, mais tout différent : car le côté G F, qui eſt plus grand que G H, peut ſe trouver dans la repréſentation *gf* plus petit que *gh*, & le triangle G H F rectangle en H eſt obtuſangle dans ſa projection. Fig. 107.

Seconde obſervation.

Les projections des lignes courbes qui ſont dans un plan perpendiculaire à un ou pluſieurs autres plans de projection ſont des lignes droites, dont les diviſions faites par des paralleles menées par pluſieurs points de ces courbes, ſont toujours en mêmes raiſons que les abſciſſes co-ordonnées. Fig. 108.

La raiſon de la premiere partie eſt que la projection alors n'eſt plus celle de la

courbure, mais du plan dans lequel elle eſt.

La raiſon de la ſeconde, conſiſte en ce que ce n'eſt pas la projection de la courbure que l'on voit repréſentée, mais celle des lignes droites qui y ſont inſcrites, ſuppoſées paralleles entr'elles, & coupées proportionnellement par d'autres lignes plus ou moins obliques.

CHAPITRE I.

De la deſcription du cercle ſur des ſurfaces concaves ou convexes de la ſphere du cône & du cylindre.

PROBLEME I.

Faire paſſer un cercle par trois points donnés ſur la ſurface concave ou convexe de la ſphere.

DANS la théorie on ne fait point de différence des propriétés d'une ſurface conſidérée par ſa concavité, ou par ſa convexité; il n'en eſt pas de même dans la pratique des Arts, il eſt plus facile d'opérer ſur la concave que ſur la convexe.

Premiérement, s'il s'agit de décrire un cercle majeur, c'eſt-à dire qui paſſe par le centre de la ſphere dans la ſurface con-

cave, il ſuffit qu'on ait deux points donnés, dès que le diametre de la ſphere eſt connu, & que ces deux points ne ſont pas diamétralement oppoſés, parce qu'il eſt évident, par la génération de la ſphere conſidérée comme la révolution d'un demi-cercle autour de ſon diametre, que tous les cercles majeurs imaginables peuvent paſſer par ces deux points, qui deviennent alors les poles de la ſphere.

Si les deux points donnés ſont moins éloignés que de 180 degrés, on ne peut y faire paſſer qu'un cercle majeur, mais une infinité de mineurs de différentes grandeurs; de ſorte que pour en déterminer la poſition, il faut néceſſairement avoir trois points donnés à la circonférence.

Soit ces trois points A, B, E dans la ſurface concave de la ſphere, on en meſurera les diſtances par leurs cordes, dont on formera ſur une ſurface plane ſéparément un triangle A B E, aux côtés duquel A B & A E on menera les perpendiculaires B *d*, E *d* par leurs extrêmités B & E, leſquelles ſe couperont en *d.* Si l'on tire A *d*, on aura le diametre du cercle propoſé à décrire dans la ſurface concave de la ſphere. *Fig. 109.*

D'un point P pour pole, pris à volonté, on décrira un cercle, dont le diametre ſera celui qu'on vient de trouver.

Fig. 110. Puis on fera à part, sur une surface plane, un triangle isoscele A P*d*, composé du diametre trouvé A *d*, & des deux distances égales de ce diametre au pole P, qui a servi à décrire le cercle mineur, auxquelles si l'on tire des perpendiculaires A X, *d*X par leurs extrêmités A & *d*, elles se couperont au point X, où sera une des extrêmités du diametre de la sphere, dont l'autre est en P: ainsi P X étant trouvé, on aura sa moitié en C pour le centre de la sphere, & C P ou C X pour son rayon.

Présentement si l'on veut tracer dans sa surface concave un cercle majeur par deux points donnés, on fera un triangle rectangle isoscele P C D, dont les côtés seront égaux au rayon trouvé P C; l'hypoténuse P D sera la longueur du cordeau qui doit servir à tracer ce cercle majeur, dont on doit chercher le pole, qui sera déterminé par les points donnés à sa circonférence, par exemple E & F, desquels comme centres, & du cordeau C P pour rayon, on tracera dans la surface concave deux arcs de cercles qui se couperont en un point O, où sera le pole du cercle majeur demandé, duquel on le tracera avec le même cordeau fixé en O, non comme d'un centre qui differe du pole, en ce qu'il est sur une surface plane, & que le pole peut être considéré

Fig. 111.

ſidéré comme le ſommet d'un cône, dont le côté eſt le cordeau, & le cercle demandé la circonférence de la baſe. C. Q. F. F.

Si au lieu d'un cercle majeur on demande un cercle mineur, qui doit paſſer par trois points donnés 1.2.3, il faut chercher & trouver le diametre de la ſphere, comme nous venons de le dire; puis ayant décrit à part ſur une ſurface plane un cercle par les trois points donnés de diſtances relatives, on en inſcrira le diametre *mn* dans un arc de cercle majeur MPI, dont on a le rayon MC par l'article précédent, lequel arc étant diviſé en deux également en P, déterminera ce point pour le pole du cercle mineur: ainſi fixant un cordeau *m*P dans la ſurface concave de la ſphere en P, on y tracera le cercle mineur demandé *m*.3.2,*n*.1. C. Q. F. F.

Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que l'opération devoit ſe faire dans la ſurface concave de la ſphere, qui eſt celle dont il s'agit le plus communément dans les ouvrages d'architecture, qui ſont rarement extradoſſés; mais ſuppoſant qu'ils le puiſſent être, & que les cercles à décrire ne fuſſent ni de niveau ni à plomb, qui ſont les cas les plus ordinaires, où l'on n'a pas beſoin d'opération géométrique, il faudroit tirer une perpendiculaire au rayon *mc* dans l'é-

pure qui couperoit le diametre ou le rayon CP prolongé en S, la distance S*m* seroit la longueur d'un cordeau qu'il faudroit attacher au sommet d'une perche PS au dessus de l'extrados de la voûte sphérique, avec lequel on traceroit le cercle, qui seroit celui qu'on demande, en tournant tout autour, parce que cette ligne *m*S étant tangente à la surface concave de la sphere, ne la toucheroit qu'à la distance *m* & *n*, sans aucun frottement qui pût faire plier & varier le cordeau en longueur.

Il faut cependant observer que cette pratique ne pourroit servir à tracer un cercle majeur sur la surface convexe de la sphere, parce que la tangente deviendroit infiniment longue, devenant alors parallele à l'axe. Dans cette circonstance, on ne peut opérer que par l'*à-plomb* & le *niveau* par petites parties jointes ensemble bout à bout: c'est ainsi que le font ces côtes de plomb, souvent dorées sur les couvertures extérieures des dômes modernes, comme on voit aux Invalides & ailleurs; il est même rare qu'on les fasse exactement sphériques, mais alongés en sphéroïdes, qui ont beaucoup plus de grace, comme on le voit, en comparant le dôme de l'Assomption circulaire avec celui des Invalides qui est surmonté.

La démonſtration des opérations que nous venons de faire aux fig. 109 & 110, eſt fondée ſur cette propoſition élémentaire, *Eucl.* Livre III, p. 31, que l'angle dans le demi-cercle eſt droit, & par conſéquent appuyé ſur le diametre: or les angles A B *d* & A E *d* ſont droits par la conſtruction, de même que les angles X A P, X *d* P : donc les lignes A *d* & P X ſont des diametres des cercles qui paſſent le premier par les points donnés A B E, & le trouvé *d*. Le ſecond par les points donnés A P *d* & le trouvé X dans une ſurface plane, & qui ſe trouvent adaptés à la ſurface concave de la ſphere, où les poles, qui ne ſont pas dans une ſurface plane, doivent être conſidérés comme les ſommets des cônes droits ſur leurs baſes, dont on a trouvé les diametres, & leurs côtés P *m* ou P *n* pour les cercles mineurs, fig. 111, ou P A & P *d*, fig. 110, & P M ou P I pour le cercle majeur, paſſant par le centre de la ſphere; ce qui eſt viſible par la conſtruction.

USAGE.

Les inſcriptions des cercles dans les dômes ſphériques ne ſont pas rares, lorſqu'on veut y pratiquer des ornemens de *ſtuc* ou de *peinture*, comme l'on fait très-fréquemment en Italie, où on les peint à freſque

par compartimens, bordés de sculpture en stuc; on y voit aussi quelquefois des compartimens de lambris d'arcs de cercles, qui en se croisant forment des encaissemens quadrilateres curvilignes, dont les platfonds sont ornés de sculptures & de rosons: pour exécuter un tel ouvrage, la proposition précédente est essentielle.

PROBLEME II.

Par un point donné à la surface concave ou convexe d'un cylindre, tracer un cercle.

Premiérement dans la surface concave, si le cylindre est droit, & sa base apparente, il ne s'agit que de lui mener un contour parallele, en portant la distance du point donné à cette base, perpendiculairement à son plan, & de près en près pour avoir plusieurs points, par lesquels on trace ce cercle par le moyen d'une regle pliante.

Si la base est oblique ou indéterminée, il faut commencer par trouver des paralleles à l'axe du cylindre comme il suit, on prendra une regle ou un cordeau AB à un des bouts d'une longueur mesurée, touchant à la surface concave par ces deux extrêmités; & en ayant porté une autre parfaitement égale, & posée à l'autre bout parallélement à la premiere, en mesurant l'in-

Fig. 112.

tervalle A*a*, auquel on fera *b*B parfaitement égal, on dégauchira les deux lignes AB, *ab* en borneyant, c'eſt-à-dire en regardant du point O, un peu écarté, de maniere que la regle AB lui cache tellement l'autre *ab*, qu'elles ne ſe croiſent point, enſorte qu'elles ſoient exactement dans le même plan ; alors on ſera aſſuré que les quatre lignes A*a*, B*b* formeront un parallélogramme, & que les côtés A*a* & B*b* ſeront paralleles à l'axe du cylindre, ſoit que ce parallélogramme ſoit rectangle, ſoit qu'il ſoit obliqu'angle.

On tirera enſuite dans cette ſurface concave autant de paralleles à A*a* qu'on voudra avoir de points à la circonférence du cercle demandé, & par le point donné *d*, on leur fera une ſuite de perpendiculaires *dx* qui donneront chacune un point ſur chaque parallele à l'axe, par leſquels, avec une regle pliante, on tracera le cercle demandé.

S'il falloit faire cette opération dans une ſurface fermée par les deux bouts, comme dans une voûte en berceau, terminée par des murs, où l'on ne puiſſe pas borneyer les deux cordes AB, *ab* l'une par l'autre, pour les mettre dans le même plan, il n'y a qu'à tendre deux cordeaux en diagonale de A en *b* d'un côté à l'autre, & de *a* en B de

l'autre, si étant bien tendues elles se touchent au milieu où elles se croisent, elles seront dans le même plan; si elles laissent un intervalle entr'elles, c'est marque qu'elles n'y sont pas, & qu'il faut hausser ou baisser un des bouts, jusqu'à ce qu'elles se touchent, étant bien & également tendues, sans s'appuyer l'une sur l'autre.

La démonstration de cette opération sera facile à appercevoir, 1°. si l'on fait attention que des cordes égales A B & *ab* soutendent des arcs égaux A E B, *aeb*; 2°. que les sections d'un cylindre, parallélement à l'axe, sont des parallélogrammes; 3°. que toutes les paralleles à l'axe sont paralleles entr'elles, & qu'enfin dans le cylindre *droit* sur sa base, la section perpendiculaire à l'axe est un cercle. *Fig.* 112.

Quant à la maniere de mettre les cordes A B & *ab* dans un même plan, on sçait par les élémens que trois lignes qui se coupent sont dans un même plan : ainsi les deux rayons visuels partant du point O & la corde *ab* font un triangle O*ab*, & les mêmes rayons, coupant aussi la corde A B en *i* & *k*, font aussi un triangle O*ik* dans le même plan : donc *ik* & *ab* sont dans le même plan; ce qu'il falloit faire pour que la section A*ab*B fût un parallélogramme. Par là même raison A*b*B font un triangle : donc

les trois lignes Ab, cordeau de la diagonale, bB côté du cylindre, & A B la corde, sont nécessairement dans un même plan ; mais par l'article précédent, A B & ab sont dans le même plan : donc l'autre diagonale aB sera aussi dans le même plan : par conséquent l'une & l'autre doivent se toucher à leur intersection, puisqu'elle sont dans le même plan.

Cette observation fournit un moyen facile de reconnoître si une porte ou une table est exactement plane, ou s'il y a du gauche, en tendant deux fils d'un angle opposé à l'autre qui se croisent au milieu.

Nous venons de donner la maniere de tracer un cercle dans une surface concave cylindrique, qui a souvent son application dans la pratique, il faut voir comment on doit le faire sur la surface convexe.

Comme cette opération, ainsi que la précédente, dépend du moyen de trouver une droite parallele à l'axe, si les bases du cylindre sont libres, il sera facile d'y appliquer la même pratique, en prenant des cordes égales aux bouts opposés, & les mettant dans le même plan, par le moyen de deux regles qui excedent de part & d'autre la longueur de ces cordes, qu'on pourra bornoyer, comme nous l'avons dit, en écartant l'œil, & tournant ces regles opposées,

de maniere que la premiere couvre la seconde ; & tirant des lignes d'un bout d'une corde à l'autre, lesquelles seront droites, & les côtés d'un parallélogramme, comme dans le cas précédent. Mais si les bases étoient embarrassées, il faudroit appliquer sur le côté du cylindre une regle ou une planche jaugée de largeur derriere la convexité en longueur, & la hausser & baisser, jusqu'à ce qu'en se reculant, son arête s'alignât avec la surface aux points d'attouchemens du rayon visuel ; alors en traçant une ligne le long de la regle où elle touche le cylindre, on aura une parallele à l'axe qui suffit pour en tracer d'autres, & leur faire des sections perpendiculaires par où le cercle demandé doit passer.

On peut aussi, par une maniere méchanique, trouver la position de deux points d'une ligne parallele à l'axe, sur un petit objet, c'est de tracer par un point, pris à volonté, une circonférence avec un compas sur la surface convexe d'un rayon le plus grand qu'on pourra ; puis de la même ouverture, on fera sur du papier ou sur du carton un cercle, dont on appliquera le contour, en le pliant sur la surface courbe, ensorte que le centre soit exactement sur le précédent ; ces deux contours se croiseront en deux points, qui seront sur le côté droit

du cylindre, parce que le rayon du cercle étant plié, ſera plus court partout ailleurs que ſur ce côté, où il ſera couché à plat, & égal à celui de la premiere trace, avec laquelle il ne peut convenir qu'aux deux extrêmités d'un diametre, où ces deux courbes différentes ſe croiſeront.

Tout ce que nous venons de dire pour tracer des paralleles à l'axe du cylindre, n'eſt qu'un préparatif pour tracer dans ſa ſurface concave ou ſur la convexe un cercle paſſant par un point donné, dont voici la pratique.

Ayant tracé autant de paralleles à l'axe qu'on voudra avoir de points à la circonférence du cercle demandé, on tracera une perpendiculaire à la parallele, ſur laquelle eſt le point donné D, en opérant, comme l'on feroit ſur une ſurface plane, faiſant des points 1 & 2 pour centre équidiſtans de D, une ſection d'arcs de cercles en E ſur *Fig.* 113. la parallele la plus prochaine, puis des points 3 & 4 équidiſtans de E une interſection ſur la parallele ſuivante en F, ainſi de ſuite en G; ſoit dans la ſurface concave, ou ſur la ſurface convexe, on appliquera d'un point à l'autre, ou pluſieurs enſemble, une regle pliante, au long de laquelle on tracera le cercle demandé, qui ſera exact, ſi le cylindre eſt droit, mais s'il étoit ſca-

lene, le développement de ce cercle ne seroit plus en ligne droite, comme nous le montrerons ci-après.

USAGE.

Ce problême est en quelque façon le fondamental de la construction des voûtes en berceau; parce qu'il donne la maniere de trouver cette courbe, qu'on appelle l'*arc droit*, c'est-à-dire celui de la section perpendiculaire à l'axe du cylindre, & à ses paralleles, qui en sont les côtés, suivant laquelle le plan de ces modeles, qu'on appelle *panneaux*, doivent être posés pour diriger le contour de l'excavation de la pierre, en les appliquant sur le massif, & de ces autres modeles, qu'on appelle *cerches*, qui se mettent en dehors pour la même fin, lesquelles sont tournées en sens contraire au parement de la pierre, c'est-à-dire convexes pour la partie concave, & concaves pour être appliquées à une surface convexe, mais toujours dans le plan de la section perpendiculaire à l'axe, qu'on appelle l'*arc droit*, laquelle position est de conséquence: car si le plan de ce modele s'en écarte par quelque obliquité, son contour indiqueroit un arc circulaire, ou il en faudroit un elliptique, comme nous l'avons dit en parlant de la nature des sections du cylindre.

PROBLEME III.

Par un point donné à la surface concave ou convexe d'un cône droit ou scalene, trouver un cercle.

On sçait qu'il y a deux sortes de cônes : celui dont l'axe est perpendiculaire à sa base, est appellé *droit*; s'il est oblique, on l'appelle *scalene*.

On peut cependant appeller, droit sur une base elliptique, celui dont l'axe est perpendiculaire à une base de ce genre de courbe, qui n'est pas la naturelle, qu'on suppose toujours circulaire, par la génération de ce solide, qu'on considere comme formé par la révolution d'un triangle rectangle, tournant autour d'un de ces côtés ; d'où il suit que toutes les sections paralleles à la base sont des cercles : ainsi il n'y a rien de plus facile que de tracer un cercle sur la surface d'un cône droit par un point donné, si l'on en a le sommet S, parce qu'il n'y a qu'à y attacher un bout de cordeau de la longueur donnée SD, & tourner tout autour avec un crayon à l'autre bout. *Fig. 114*

Mais si l'on n'a pas le sommet, comme lorsqu'il s'agit d'un cône tronqué, il faut tracer à sa surface des côtés droits, dont la direction doit tendre de la base au sommet, si le cône étoit complet.

Pour trouver ces lignes droites ſur cette ſurface courbe, il faut opérer à peu près comme l'on a fait à l'égard du cylindre, par le moyen de deux regles poſées ſur les centres de la baſe ſupérieure & inférieure, & bornoyées l'une par l'autre pour les mettre dans le même plan, qui paſſeroit par l'axe du cône; puis marquer les points où ces regles coupent la circonférence ſupérieure & inférieure, & tirer des lignes droites de l'un à l'autre, ſur leſquelles on portera les diſtances de la baſe au point donné, & multipliant ces lignes autant qu'on voudra y marquer de points équidiſtans de la baſe, par leſquels on tracera le cercle demandé à la main, ou avec une baguette ronde pliante, & non pas avec une regle pliante, comme nous l'avons dit pour le cylindre, parce que le développement du cercle ſur le cône n'eſt pas une ligne droite comme ſur le cylindre droit, mais un arc de cercle, qui a pour rayon la diſtance du ſommet ſuppoſé au point donné à la ſurface.

Mais ſi le cône eſt droit ſur une baſe elliptique, le problême devient difficile, parce que le contour de la ſection circulaire n'eſt pas parallele à la baſe, mais celle d'un plan incliné à l'axe du cône, ſuivant un angle qu'il faut trouver. Ce problême

étoit nouveau dans le tems que je fis ma Stéréotomie, & j'en dois la solution à MM. *Jean Bernoulli*, pere & fils, qui m'en ont fourni deux, dont voici la plus simple.

Par un point donné à la surface d'un cône droit sur une base elliptique, y tracer un cercle.

Soit ASB la section par l'axe du cône, dont ADB est la moitié de la base, CD la moitié du grand axe avec son foyer F, & BA le petit axe prolongé vers *d*. *Fig.* 115.

Du centre C & CD pour rayon ayant fait l'arc D*d*, & tiré *d*S, cette ligne représentera le grand côté du cône, & AS le petit. On fera en A l'angle SAO à volonté, on portera sur la ligne AC la distance CF en AO; d'où l'on tirera OS, & la même distance CF sur le grand côté *d*S en *n*; on fera S*v* égale à S*n* sur la ligne OS, puis par les points V & C, on tirera l'indéfinie VY qui coupera le petit côté du cône AS en *y*, & son opposé SB en Y, la ligne *y*Y sera le diametre du cercle qu'on cherche: enfin par le point donné P sur la surface du cône, on menera une parallele PQ à la ligne *y*Y, qu'on divisera en deux également en *m*, la ligne PQ sera le diametre du cercle demandé, dont *m* est le centre.

Etant trouvés, le diametre PQ du cercle

& sa position dans le cône à l'égard de l'axe SC, on tracera le cercle sur la surface du cône de la même maniere qu'une ellipse, dont nous allons parler ci-après.

Comme la démonstration de la solution de ce problême est un peu au dessus d'un petit Livre d'Elémens de pratique, nous renvoyons les lecteurs qui en seront curieux, au second Livre de ma Stéréotomie, page 216.

L'usage de cette proposition ne peut s'offrir que dans les traits des voûtes coniques, qu'on appelle *trompes*, dont on parlera au 4[e] Livre.

TROISIEME CAS.

De la description du cercle sur la surface d'un cône lorsqu'il est scalene.

Quoique la section parallele à la base d'un cône scalene soit un cercle, comme dans le cône droit, on ne peut cependant se servir des mêmes moyens pour le tracer, soit dans la surface concave, soit sur la surface convexe, parce que les distances des plans paralleles entr'eux, prises sur la surface du cône, sont inégales, étant différemment inclinées à l'une & à l'autre, quoique dirigées au sommet de ce cône; ce qui est évident, en ce que ceux qui approchent

le plus de la perpendiculaire ſuppoſée, abaiſſée du ſommet ſur le plan de la baſe prolongée, ſont plus courts que les côtés qui en ſont plus éloignés.

Il faut donc commencer par chercher le point de cette perpendiculaire ſur la baſe prolongée, s'il le faut, lequel y détermine la projection du ſommet du cône.

Lorſque l'axe du cône eſt aſſez incliné, pour que ce point tombe hors de la baſe, on peut l'y déterminer géométriquement par la prop. 11 du 11e Livre d'*Euclide*, qui ſert auſſi à chercher le pied du ſtile dans un cadran, ou bien méchaniquement par le moyen de deux équerres, dont un des bras eſt appuyé ſur le plan de la baſe, & l'autre en l'air, obſervant que ceux qui ſont ſur la baſe n'y ſoient pas poſés en ligne droite, mais faiſant un angle approchant du droit: ſi les branches qui ſont en l'air touchent enſemble le même point, la jonction de deux autres au ſommet de l'angle qu'elles feront, donnera la projection du ſommet du cône, parce que l'arête de leur jonction au bras, qui eſt en l'air, ne peut pencher ni d'un côté ni d'autre.

Mais ſi la projection du ſommet S tombe en dedans de la baſe, à quelque diſtance de ſon centre, on ne peut uſer de ce moyen méchanique; du ſommet S du cône comme *Fig. 116.*

d'un centre, ou plutôt un pole, on décrira un arc de cercle IEK qui coupe le cercle de la base ADBF aux points I & K; ce qui arrivera, lorsqu'on fera le rayon un peu plus grand que le côté SA, qui est dans le plan de la perpendiculaire SCA, & plus petit que son opposé SB.

Comme le point S est en l'air, il sera plus aisé de tracer cet arc avec un cordeau arrêté en S, qu'avec un compas, surtout si le cône est un peu aigu au sommet. Cet arc IEK étant tracé, & divisé en deux également en E, on tirera les lignes EI, EK sur le plan de la base, qui feront l'angle IEK, qu'on divisera en deux également, pour avoir la diagonale EB, qui passera par le point de projection du sommet S du cône scalene, lequel sera déterminé par l'intersection de cette diagonale & le diametre du cercle IEK : par exemple, dans cette figure IK, double du rayon ES, duquel si l'on ôte la partie EA, extérieure au cône, le reste AS donnera la projection S du sommet du cône demandé sur sa base.

Cette préparation étant faite, on tracera le profil ASP du cône, c'est-à-dire une section plane, passant par la projection P du sommet dans le premier cas où elle tombe au dehors de la base, ou bien dans

Fig. 117.

le

le ſecond où elle eſt en dedans, le diametre AB de la baſe ſera celui de la plus grande obliquité, s'il paſſe par le point P de la projection du ſommet S.

Sur ce diametre AB de la baſe, ayant décrit le demi-cercle ADB, on le diviſera en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points à la moitié du contour du cercle demandé, dont le diametre eſt *de* parallele à AB, comme ici ſeulement en quatre aux points 1 . D . 3, d'où l'on tirera des perpendiculaires à AB, qui le couperont aux points *o*, C, *r*, par où on menera des lignes au ſommet S, qui couperont le diametre *de* du cercle à tracer aux points *f*, *c*, *g*. *Fig.* 117.

Il eſt viſible que dans ce profil du triangle par l'axe du cône, les lignes *o*S, CS, *r*S qui ſont des projections de côtés du cône, paſſant par les points de la baſe 1, D, 3 ſont plus courtes que les côtés qu'elles repréſentent, parce que ces côtés ſont tous inclinés au plan de projection ASB; de ſorte qu'il faut en chercher les véritables longueurs pour en faire l'application ſur la ſurface concave ou convexe du cône, ſur laquelle leurs parties compriſes entre les plans de la baſe & de la ſection *de*, qui lui eſt parallele, doivent déterminer les points au contour du cercle, dont *de* eſt le diametre

donné. Soit, par exemple, la vraie longueur de la ligne *o*S à trouver, on transportera cette ligne en *ot* sur la base AB prolongée; la ligne tirée du point 1 de la circonférence ADB au point I*t* sera la vraie longueur de la projection *o*S; la ligne D*u* la valeur de CS, & 3*x* celle de *rs*.

Les valeurs des côtés du cône étant trouvées, il ne s'agit plus que d'avoir celle de leurs parties, où passe la circonférence du cercle demandé, qui doit passer par le point donné *d*.

Du point *o* pour centre, & *of* pour rayon, on décrira un arc *fy* qui coupera la base AB au point *y*, par lequel on abaissera une perpendiculaire à cette même base, qui coupera le côté *it* au point Y, qui sera la distance du point 1 de la circonférence de la base à celle du cercle de la section parallele, passant par le point donné *d*.

On trouvera de la même maniere sur D*u*, 3.*x* les points Z & Q, où ces côtés coupent la circonférence du cercle, dont *de* doit être le diametre, qu'on appliquera sur la surface concave ou la convexe du cône, comme il suit.

Ayant marqué sur la base du cône le diametre de plus grande obliquité AB, par la maniere que nous avons donnée ci-devant, on divisera le contour de la base en un

même nombre de parties qu'on l'a divisé dans la préparation, & l'on portera du point A, de part & d'autre, l'arc A1, ensuite AD, puis A3, &c, & par les points A,1,D,3,B, on tirera sur la surface du cône des lignes droites au sommet S.

On portera ensuite sur AS la distance A*d* au point donné *d*, que l'on marquera pour un point du cercle à tracer. Ensuite sur le côté 1S, on portera la longueur 1Y, qui marquera un second point de part & d'autre de AS; puis sur le côté DS, tracé à la même surface, la longueur DZ, sur 3S la longueur 3Q, & enfin sur BS la longueur B*e*; ce qui donne cinq points de la circonférence du cercle demandé d'un côté de AB, & trois de l'autre: par conséquent huits points à la surface du cône, par lesquels on tracera, à la main, ou avec une regle pliante, ne faisant toucher au cône qu'une de ses arêtes, sçavoir la supérieure de D en B, & l'inférieure de D en A. C. Q. F. F.

USAGE.

Cette proposition est une fondamentale des traits de ces voûtes coniques, qu'on appelle *trompes*, qui sont rampantes, c'est-à-dire inclinées à leurs impostes du devant au derriere, particuliérement pour avoir la

tête de cette pierre, qui en fait le fond d'une ſeule piece, qu'on appelle le *trompillon*.

CHAPITRE II.

De la deſcription de l'ellipſe ſur les ſurfaces cylindriques & les coniques, concaves ou convexes.

PROBLEME I.

Le grand axe d'une ellipſe avec un point à la circonférence d'un cylindre étant donné, & dont la diſtance à un des axes eſt connue, y tracer une ellipſe.

Fig. 118. PRemiérement, ſi le point donné eſt à l'extrêmité du grand axe, par exemple en D, on tracera ſur une ſurface plane à part, un angle BAD égal à celui de l'axe du cylindre avec le plan de la baſe, en tirant deux paralleles AD, BL indéfinie de l'intervalle du diametre AB; puis mettant une pointe du compas ouvert de la longueur du grand axe donné DB, ſur le point donné D pour centre, on tracera avec l'autre un arc de cercle *fg*, qui coupera B*l* en B; d'où tirant une perpendiculaire à BD, on aura le trian-

gle A D B, qui exprimera celui qui ſe fera dans le parallélogramme par l'axe du cylindre, ſi on le ſuppoſe coupé perpendiculairement à ce parallélogramme par deux plans paſſans par A B & D B.

Cette préparation étant faite, on décrira ſur le diametre AB du cylindre un demi-cercle A M B; enſuite on tirera autant de perpendiculaires à ce diametre qu'on voudra avoir de points à la circonférence de l'ellipſe demandé, comme 1*r*, 2*r*, 3*r*, M C, &c. qui couperont l'arc de cercle aux points 1, 2, 3, M, & le grand axe de l'ellipſe aux points *e*, *e*, *e*, E, &c. par leſquels on menera autant de perpendiculaires indéfinies à l'axe BD, ſur leſquelles on portera les ordonnées du cercle AMB dans le même ordre, ſçavoir, 1*r* en *e*1, 2*r* en *e*2, C M en E*m*, &c; & par les points D, 1, 2, 3, *m*, B, on tracera le contour de l'ellipſe qu'on doit appliquer à la circonférence concave ou convexe du cylindre, comme il ſuit.

Ayant décrit (par le probl. 2) un cercle ſur la circonférence du cylindre par un point B, pris à volonté, & tiré par le même problême autant de perpendiculaires à ce cercle qu'on veut avoir de points à la diſtance les uns des autres, déterminée par les arcs A1, 1.2, 2.3, 3M, &c; on portera ſur chacune de ces paralleles à l'axe, les lon-

gueurs AD, *re*, *re*, CE, &c. de part & d'autre du côté AD, en suivant jusqu'au point B, où le cercle & l'ellipse se touchant, il n'y aura plus d'intervalle de l'un à l'autre.

Par les points trouvés, on tracera à la main l'ellipse demandée, ou avec une baguette ronde pliante, & non pas avec une regle pliante, quoiqu'on puisse s'en servir pour tracer le cercle, parce que le développement de celui-ci est une ligne droite, mais non pas le développement de l'ellipse, dont le plan n'est pas perpendiculaire à l'axe du cylindre : car dans ce cas, qui se trouve dans les cylindres scalenes, on peut tracer une ellipse avec une regle pliante, & non pas le cercle de sa base, par la même raison que le plan du cercle n'est pas perpendiculaire alors à l'axe du cylindre; ce qui est facile à concevoir. C'est par cette raison que si le cylindre étoit scalene, il faudroit considérer AB perpendiculaire sur AD, côté du cylindre, comme le petit axe d'une ellipse, dont DB, diametre du cercle de la base, seroit le grand axe : ainsi au lieu du demi-cercle AMB, il faudroit décrire la demi-ellipse ASB, faisant le demi-grand axe SC égal à ED ou EG, parce que la base oblique DGB est un cercle, au dedans duquel tous les diametres donnés, comme *d*B, *k*B, seront à des el-

lipses ; ce qui est évident par la nature des cylindres scalenes : ce qu'il est facile de concevoir, après ce que nous en avons dit à la premiere Partie.

La démonstration de cette opération est fondée sur ce que toutes les sections planes, paralleles à l'axe du cylindre, & passant par les ordonnées au cercle de la base AMB, sont des parallélogrammes de différentes largeurs, coupés en deux également par le plan qui passe par l'axe & le diametre AB de cette base, qui leur est perpendiculaire, & dont les interſections avec ce plan, sont les paralleles *re*, *re*, CE, lesquelles sont terminées au plan de la section elliptique DB, qui est bien oblique à l'axe CE, mais aussi perpendiculaire au plan du parallélogramme par l'axe ADLB; d'où il résulte que les interſections de ce troisieme plan, avec les premiers, sont aussi perpendiculaires au parallélogramme par l'axe, comme celle avec le plan du cercle de la base; mais elles sont aussi égales, parce qu'elles sont terminées par les côtés des parallélogrammes rectangles, qui sont aussi ceux du cylindre : donc les ordonnées au diametre DB sont égales & correspondantes à celles du cercle de la base, mais non pas équidistantes entr'elles ; ce qui constitue la différence du cercle à l'ellipse:

donc les mesures prises sur les paralleles à l'axe du cylindre *re*, *re*, CE sont les mêmes que les intervalles du cercle à l'ellipse, pris sur les côtés du cylindre. C. Q. F. F.

USAGE.

On verra dans le quatrieme Livre, que ce problême est un des plus usuels dans l'appareil des voûtes en berceaux, ou des arcades en deux circonstances, ou parce qu'elles ont quelque biais ou obliquité de direction à l'égard de leurs faces, ou parce que leur ceintre, appellé *l'arc droit*, n'est pas circulaire, mais elliptique ou surbaissé, ou surmonté: les joints des lits des voussoirs sont des lignes droites paralleles à l'axe du cylindre, soit qu'il existe dans le massif, ou qu'il soit imaginaire & supposé dans le vuide, comme dans toutes les surfaces concaves, appellées les *doëles*.

PROBLEME II.

Les deux axes d'une ellipse, ou seulement le grand & une ordonnée étant donnés, la tracer sur la surface d'un cône donné.

Il est un peu plus difficile de tracer une ellipse sur un cône donné, que sur la surface d'un cylindre, parce que dans ce dernier il suffit d'avoir le grand axe, le petit

étant donné à la base qui est invariable : il n'en est pas de même dans le cône, quoique le grand axe soit donné, il faut encore qu'il soit donné de position avec le petit axe, ou une ordonnée au grand, d'où l'on tire le moyen de connoître le *parametre*, qui est une quatrieme proportionnelle, 1°. au rectangle des abscisses du grand axe l'une par l'autre ; 2°. au quarré de l'ordonnée ; 3°. à la longueur du grand axe.

Comme cette ligne est nécessaire pour la construction de ce problême, il faut commencer par la chercher ; ce que l'on peut faire sans calcul, comme il suit.

Soit E L le grand axe donné, & *o d* une ordonnée à cette axe ; on tirera par les points *d* & L la droite L*x*, jusqu'à la rencontre d'une droite E*x*, parallele à *od*; on portera E*x* sur l'axe prolongé de E en H : par le point H, on menera une parallele H G à la même ordonnée *od*, jusqu'à la rencontre d'une droite D G, tirée par les points E & *d*; cette droite G H sera le parametre cherché : car les triangles semblables *o d*L, E*x*L donnent la proportion *o*L:*od*::EL:E*x*; les triangles semblables E*do*, EHG donnent cette autre proportion, *o*E:*od*::EH = E*x*:HG, en multipliant par ordre les termes de ces deux proportions, on aura $oL \times oE : od^2$::EL:HG, *Fig.* 119.

qui eſt une propriété caractériſtique du parametre.

Le parametre étant trouvé, on cherchera la poſition de l'axe dans le cône comme il ſuit : premiérement, une quatrieme proportionnelle aux trois lignes E L, l'axe donné, HG ſon parametre, & S B, côté du cône, qui ſera la ligne B y, qu'on portera ſur ce côté de B en y, par où on menera y D, parallele à A B, qui coupera un arc de cercle S D B A circonſcrit au triangle S B A au point D, par lequel on menera l'indéfinie S D F, ſur laquelle on portera la longueur de l'axe donné en S G, puis on tirera G L parallele au côté S A, elle coupera SB en L, d'où l'on menera L E parallele à S G, qui ſera la juſte poſition de l'axe donné dans le cône, qu'il falloit premiérement trouver, parce qu'il eſt aiſé de voir qu'elle peut varier de deux manieres, en l'inclinant plus ou moins, & en l'approchant ou l'éloignant du ſommet.

Fig. 120.

Préſentement cette poſition étant déterminée, il ſera facile de tracer l'ellipſe demandée ſur la ſurface du cône concave ou convexe, en cherchant pluſieurs points à ſa circonférence.

Du point C, milieu de AB pour centre, ayant décrit le demi-cercle A H B pour la moitié de la baſe du cône, on abaiſſera ſur

son diametre, par les points E & L, les perpendiculaires E*e* & L*l*, qui donneront *el* pour la projection de l'axe donné, & pour diametre d'un demi cercle *e*M*l*, qui sera la projection de l'ellipse qu'on cherche. On prendra ensuite sur le côté SA autant de parties égales qu'on voudra avoir de points à la circonférence de l'ellipse, à commencer du point E vers A, jusqu'à L4, parallele à AB; & par les points de leurs divisions, 1, 2, 3, 4, on menera des paralleles au diametre AB, qui couperont l'axe EL de l'ellipse proposée aux points *v*, *x*, *y*, L, desquels on abaissera des perpendiculaires sur le diametre *el* du cercle *e*M*l*, qu'on prolongera jusqu'à sa circonférence en N, M, O, lesquelles coupant le diametre *el* aux points *r*, R, *t*, détermineront les ordonnées au cercle de projection, qui seront les mêmes pour l'ellipse, en les portant perpendiculairement à l'axe donné EL, comme *r*N en *vn*, RM en *xm*, *t*O en *yo*; & par les points E, *n*, *m*, *o*, L, on tracera l'ellipse demandée, qu'il ne s'agit plus que de transporter sur la surface concave ou convexe du cône donnée.

Pour y parvenir, il faut tirer du centre C de la base du cône par les points N, M, O de la circonférence du cercle de projection les lignes C5, C6, C7 qui couperont la cir- *Fig.* 120.

conférence de la base du cône aux mêmes points 5, 6, 7, dont on portera les arcs de suite, A5, 56, 67, 7B sur le contour de la base du cône; on tirera de chacun de ces points des lignes droites 5S, 6S, 7S qui détermineront les côtés du cône sur lesquels on doit porter les distances 5*n*, 6*m*, 7*o* entre les deux donnés E & L, pour avoir les points E, *n*, *m*, *o*, L au contour de la section demandée, par où on fera passer la courbe de l'ellipse.

Mais comme toutes ces distances sont inclinées, elles ne peuvent être prises que sur la ligne AS; supposant le cône droit, la longueur A1 donnera sur 5S le point *n*; A2 donnera sur 6S le point *m*; A3 donnera sur 7S le point *o*, & A4 ou BL son égale sur B*s* le point L; ce qu'il falloit faire pour une moitié, à laquelle l'autre sera égale en tout.

La démonstration de la premiere partie de cette construction suppose trop de connoissance des sections coniques, pour qu'on puisse l'insérer dans un abrégé d'élémens de pratique; ceux qui en seront curieux, la trouveront dans le second Livre de ma Stéréotomie, au problême 35, page 231.

Quant à la seconde, qui suppose l'axe donné dans sa juste situation dans le cône, elle représente assez naturellement, en se

rappellant que la projection de l'ellipse sur la base du cône, par un grand nombre de lignes paralleles entr'elles, représente un cylindre, dont la base est sur celle du cône & l'ellipse à faire une section oblique de ce cylindre, c'est-à-dire que c'est une application à l'endroit où nous avons donné la maniere de tracer une ellipse sur un cylindre inclus dans un cône.

Il faut remarquer que nous avons supposé jusqu'ici que l'opération devoit se faire sur un cône droit, c'est-à-dire perpendiculaire sur sa base; mais s'il étoit scalene, elle deviendroit un peu plus composée, en ce que les distances de la base, au contour de la section, ne peuvent être prises sur un seul & même côté du cône, comme on a fait, mais sur des côtés inclinés différemment, dont il faut chercher les valeurs, comme nous l'avons fait, où l'on a donné la maniere de tracer un cercle sur la surface d'un cône scalene; ce qu'il est inutile de répéter.

Si le cône est droit sur une base elliptique, ce qui le met au rang des scalenes proprement dits, il faut aussi opérer en cette considération.

PROBLEME IIIe, ET GENERAL.

Pour la defcription de toutes les fections coniques fur les furfaces concaves ou convexes des cônes.

Ce problême fe peut réfoudre très-facilement, par les feules projections horizontales & verticales de plufieurs tranches des cônes fuppofés coupés parallélement ou perpendiculairement à leurs bafes, ou à leurs axes, fans aucun calcul, ni autres opérations géométriques, comme nous allons en donner les exemples pour les trois principales fections, qui font la parabole, l'ellipfe & l'hyperbole.

Premier exemple pour la Parabole.

Soit ASB le triangle par l'axe du cône SC, & PR l'interfection de ce plan par un autre, qui lui eft fuppofé perpendiculaire, & parallele au côté AS, ce qui conftitue la courbe, appellée *parabole.*

Fig. 121. Ayant tracé du centre C de la bafe le demi-cercle A*rp*B, qui en repréfente la moitié, on divifera la hauteur PO en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points à la circonférence de la parabole, par lefquels on menera des lignes paralleles

à la base AB, comme 4P. 1, 7. 2, 6, &c. qui couperont la ligne PR aux points *d*, *e*, *f*, P, par lesquels on abaissera des perpendiculaires sur cette ligne AB, qu'on prolongera jusqu'à la demi-circonférence de la base A *rp* B.

On abaissera aussi des perpendiculaires à la même AB par les points P, 5, 6, 7 où le côté du cône est coupé par les transversales 3.5, 2.6, &c. qui seront terminées à la ligne AB en des points, que la petitesse de la figure n'a pas permis de marquer pour éviter la confusion.

Ces points détermineront la longueur des rayons de tous les arcs concentriques que l'on doit décrire du centre C, depuis la ligne AB jusqu'aux perpendiculaires, provenant des points de sections de l'axe de la parabole, qui est la ligne RP. Ainsi le premier arc de cercle à la base sera B*r*, le second au dessus sera fait avec le rayon C*o*, où la perpendiculaire, provenant du point 7, coupe AB, & cet arc sera terminé à la perpendiculaire *d*D, provenant du point *d* de l'axe de la parabole, où il est coupé par la transversale 1.7, & ainsi de suite d'arc en arc, terminé par les perpendiculaires de suite, dont les intersections donneront la projection de la parabole *r*, *x*, *y*, Z, O, qui est aussi une parabole, dont l'axe est *c*R, & l'amplitude R*r*.

Mais comme ce n'eſt pas celle que nous cherchons, dont elle n'eſt que la projection, il faut la chercher par les mêmes moyens que nous avons eu ſa projection, en ajoutant à la premiere figure (pour éviter la confuſion des lignes) celle de la parabole ſur ſon plan tourné en face, qui n'eſt repréſentée à la précédente figure qu'en profil, par la ſeule ligne PR.

On fera donc BQ parallele à PR, & également terminée par la ligne 4P prolongée en Q, ainſi que toutes les paralleles qui couperont l'axe BQ aux points 1, 2, 3 B, par leſquels on menera des perpendiculaires à l'axe BQ, qu'on fera égales aux ordonnées de la parabole, qui eſt en projection ſur la baſe, ſçavoir BM égale à Rr; IX égale à ox; 2Y égale à oy; 3z égale à oz; & par les points QZYXV, on tracera la parabole demandée, qui eſt dans ſes juſtes meſures, qu'on appliquera ſur la ſurface concave ou convexe du cône, comme nous le dirons, après avoir donné les deux autres exemples de l'ellipſe & de l'hyperbole.

Second exemple de l'Ellipſe.

Soit ASB le triangle par l'axe du cône donné, dans lequel eſt ſitué le grand axe EL de l'ellipſe, dont le centre eſt en m.

Ayant

Ayant abaissé des points E & L, les perpendiculaires Ee, Ll sur AB, on tracera du point M, milieu de el, pour centre, le demi-cercle edl, qui sera la projection de la moitié de l'ellipse demandée. Ensuite ayant tiré par le point L la ligne FL parallele à AB, on divisera l'intervalle FE en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points dans la demi-circonférence de l'ellipse demandée, comme ici en 4, aux points 1, 2, 3, F, par lesquels on menera des paralleles à AB, qui couperont le grand axe EL aux points g, m, i, d'où l'on abaissera des perpendiculaires sur AB, qu'on prolongera jusqu'à la rencontre du demi-cercle de projection el qu'elles couperont aux points 4, d, 5, & la ligne AB aux points o, M, o; ce qui donnera les ordonnées au cercle de projection $o4$, Md, $o5$, que l'on portera perpendiculaires sur le grand axe EL donné, aux points g, m, i, par l'extrêmité desquelles x, y, z, on fera passer la circonférence de l'ellipse demandée E, x, y, z, L, qu'il faut appliquer sur la surface concave ou convexe, comme nous l'avons dit ci-devant, en posant ces points trouvés sur des côtés du cône, dont on trouvera la position, en tirant du centre C de la base des lignes droites par les points de la projection de l'ellipse sur cette base, Fig. 112.

4.*d*.5, qui couperont la circonférence de la base du cône aux points 6.7.8.

Cette préparation étant faite, on portera sur la surface concave ou convexe du cône, sur laquelle on doit décrire l'ellipse, les arcs du contour de la base A6, A7, A8 sur celle du cône, à commencer d'un point A, pris à volonté sur la surface concave ou convexe, si le cône est droit, parce qu'en ce cas le commencement est indifférent, à cause de l'uniformité de ce solide, & des points A, 6, 7, 8, B, pour un côté; & de même pour l'autre demi-cercle, on tirera des lignes droites au sommet S, AS, 6S, 7S, 8S, BS qui seront des côté du cône, sur lesquels il faut porter les points E, *x*, *y*, *z*, B de l'ellipse demandée, sçavoir la distance AE sur le côté AS de la surface du cône, A*s* sur le côté 6*s* du cône pour avoir le point *x*, A2 sur le côté 7S du cône pour avoir le point *y*, A3 sur le côté 8S du cône pour avoir le point *z*; & enfin AF ou B*l* sur le côté BS du cône pour avoir le point L.

Il est aisé de comprendre que l'autre moitié de l'ellipse sera tracée de même par les mêmes mesures correspondantes à même distance des points A & B, ou E & L. Enfin par les points marqués à la surface du cône sur ses côtés tracés, on menera une ligne courbe, qui sera l'ellipse demandée,

qu'on ne pourra cependant tracer avec une regle plate pliante, parce que le développement de cette courbe sur le cône n'est pas une ligne droite: cependant comme elle est plane, c'est-à-dire dans un plan, on pourra en tracer une moitié, suivant une arête, par exemple inférieure, & l'autre moitié par une même regle pliée, en suivant l'arête supérieure; ce qui étoit proposé de faire.

Si le cône étoit scalene, il faudroit faire les mêmes préparations dont il a été parlé ci-devant, pour tracer un cercle, sçavoir, de faire le profil du triangle par l'axe sur le diametre de la plus grande obliquité qui passe par la projection de la perpendiculaire, tombant du sommet du cône sur le plan de la base prolongée, s'il le faut, lorsqu'il tombe en dehors du cercle de la base du cône.

Troisieme exemple, pour l'Hyperbole.

Les moyens que l'on a pris ci-devant pour faire les préparations nécessaires à déterminer sur une surface plane, avant que d'opérer sur une surface concave ou convexe du cône, sont les mêmes pour la description de l'hyperbole que pour la parabole & l'ellipse, sçavoir, de faire un

triangle par l'axe du cône donné, s'il est droit sur sa base, ou sur le diametre de la plus grande obliquité s'il est scalene : ensuite placer dans ce triangle la ligne droite qui représente la section de ce triangle par un autre plan qui lui est perpendiculaire, mais ou parallele à l'axe du cône, ou qui lui est incliné plus ou moins, de telle maniere cependant qu'il ne coupe pas les deux côtés, ce qui est le cas de l'ellipse, ou qu'il ne soit pas parallele à un des deux, ce qui est le cas de la parabole ; mais qu'il en coupe toujours un des deux, prolongé au-delà du sommet du cône, ce qui constitue la section qu'on appelle *hyperbole*.

Fig. 123. Soit donc ASB le triangle par l'axe SC, & PH la section d'un plan qui est perpendiculaire à ce triangle, mais parallele ou incliné à l'axe SC, de maniere qu'il rencontre le côté BS, prolongé hors du cône en un point, comme D, & le côté AS en H ; la ligne DH sera le premier axe de l'hyperbole, & HP sa prolongation dans l'hyperbole. Si l'on divise DH en deux également en N, ce point sera appellé le centre de l'hyperbole ; & la ligne tirée de ce point N par le sommet S du cône, comme *ts*, sera appellée le second axe, en faisant $Nt = Ns$.

Présentement ayant divisé l'intervalle

AH en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points à la circonférence de l'hyperbole demandée, & mené autant de paralleles à la base AB, qui couperont l'axe SC aux points *d*, *e*, *f*, & le côté AH aux points 1, 2, 3, on fera des arcs de cercles du centre C, & des longueurs 1.*f*, 2.*e*, 3.*d*, AC des arcs de cercles indéfinis sur le plan de la base ADB : on abaissera ensuite des perpendiculaires sur AB par les points H, *i*, *k*, L, P, qui couperont ces arcs aux points *h*, *z*, *y*, *x*, *p*, qui détermineront les longueurs des ordonnées de l'hyperbole, à compter depuis la ligne *p h*, qui est la projection de l'axe de l'hyperbole HP.

Cette préparation étant faite, il faut ranger ces ordonnées perpendiculairement à cet axe, comme P*p* en PV, *o x* en LX, ainsi des autres; & par les points H, Z, Y, X, V, on tracera le contour de la demi-hyperbole.

Il ne s'agit plus présentement que de transporter sur la surface concave ou convexe ces points trouvés sur une surface plane, en tirant du centre C de la base par les points de la projection *x*, *y*, *z* des lignes droites qui couperont la circonférence de cette base aux points 4, 5, 6.

Ayant tiré par un point A, pris à volonté, si le cône est droit, on tirera AS au sommet, soit dans la surface concave ou dans

la convexe, & l'on portera à droite & à gauche de ce point A les intervalles des arcs A4, A5, A6, Ap, desquels on tirera au sommet 3 des lignes droites, qui seront des côtés du cône sur lesquels on portera successivement les distances du cercle de la base aux points de l'hyperbole à chaque tranche, sçavoir AH sur AS, A1 sur 4S, A2 sur 5S, A3 sur 6S, & l'on aura les points de l'hyperbole à la surface du cône d'un côté de l'axe AH, & autant & également de l'autre. C. Q. F. F.

Au lieu de porter les distances de ces points sur des côtés du cône, on pourroit les porter sur des cercles tracés sur le cône, parallelement à la base, comme sont les tranches, alors on porteroit l'arc $3x$ sur la premiere, $2y$ sur la seconde, $3z$ sur la troisieme, & le point H sur la quatrieme.

Fin du premier volume.

APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier l'Ouvrage intitulé *la Théorie & la Pratique de la Coupe des Pierres & des Bois*, par M. FREZIER. Le succès qu'a eu la premiere édition de cet excellent Ouvrage, me fait juger que la seconde ne sera pas moins favorablement reçue, surtout après les changemens & augmentations que son sçavant Auteur a jugé à propos d'y faire. A Paris ce 14 Juin 1752.

DEPARCIEUX.

105. 106. 107. 109. 110. 112. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 122. 123.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT : Notre amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, notre Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & réimprimer des Ouvrages qui ont pour titre : *Architecture Françoise par M. Blondel ; Cours d'Architecture par Daviler, avec un Dictionnaire des termes d'Architecture par le même ; Méthode pour apprendre le dessein, avec des figures & des Académies ; ÉLÉMENS DE STÉRÉOTOMIE par M. FREZIER ; Architecture moderne. De la décoration des Édifices par M. Blondel ; la Théorie & Pratique du Jardinage par M. le Blond. Œuvres de M. Belidor ; sçavoir, le Cours de Mathématique, la Science des Ingénieurs, le Bombardier François, & l'Architecture Hydraulique. Cours de Science Militaire par M. le Blond, contenant l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier, la Fortification, l'Artillerie, l'Attaque & la Défense des Places, la Castramétation, la Tactique, &c. Recueil des Pierres gravées du cabinet du Roi.* S'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A ces Causes, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer & réimprimer lesdits Ouvrages, autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de dix années consécutives, à compter du jour de la date des présentes. Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance : comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit d'augmentations, corrections, changemens, ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, domma-

ges & intérêts ; à la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que la réimpression desdits Ouvrages sera faite dans notre royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele sous le contre-scel des présentes ; que l'impétrant se conformera en tout aux réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; qu'avant de les exposer en vente, les manuscrits & imprimés qui auront servi de copie à l'impression & réimpression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France le Sieur DE LAMOIGNON, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le sieur DE LAMOIGNON, & un dans celle de notre trés-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur de MACHAULT, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés, féaux Conseillers, & Sécrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le 21e. jour du mois d'Août, l'an de grace mil sept cent cinquante-deux, & de notre regne le trente-septieme. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre XIII. *de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris*, n°. 19, *fol.* 12, *conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du* 28 *Février* 1723. *A Paris, le* 29 *Août* 1752.

HERISSANT, Adjoint.





